EUCLIDES

vakblad voor de wiskundeleraar

december 07
nr 3
jaargang 83

Arbeidspositie wiskundedocenten

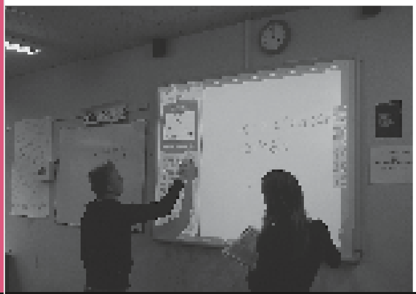
Staffelen

Wiskunde in Wetenschap

Priemgetallen

Boekbesprekingen

Het digitale schoolbord



Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

COLOFON

december
07
nr 3
jaargang 83

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie

Inzendingen bijdragen

Artikelen/mededelingen naar de hoofdredacteur: Marja Bos,
Koematen 8, 7754 NV Wachtum
E-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren; op papier in drievoud. Illustraties, foto's en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.
Zie voor nadere aanwijzingen: www.nvvw.nl/euclricht.html

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.
Veenendaal, www.de-kleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvvw.nl

Voorzitter

Marian Kollenveld,
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
Tel. (070) 390 63 78
E-mail: m.kollenveld@nvvw.nl

Secretaris

Wim Kuipers,
Waalstraat 8, 8052 AE Hattem
Tel. (038) 444 70 17
E-mail: w.kuipers@nvvw.nl

Ledenadministratie

Elly van Bemmel-Hendriks,
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
Tel. (0321) 31 25 43
E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor
- leden: € 52,50
- leden, maar dan zonder Euclides: € 35,00
- studentleden: € 26,50
- gepensioneerden: € 35,00
- leden van de VVWL: € 35,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Niet-leden: € 55,00
Instituten en scholen: € 140,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 17,50
Betaling per acceptgiro.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie bv:
t.a.v. Ada Valkenburg
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal
Tel. (0318) 555 075
E-mail: a.valkenburg@de-kleuver.nl

Kort vooraf [Marja Bos]

Onderwijstijd
23 november 2007. Leerlingprotesten tegen de norm van 1040 klokuren onderwijstijd op jaarbasis: bezigheidstherapie? 'Wij willen minder onderwijstijd!' Diezelfde vrijdag: een lange en intensieve schooldag voor veel klassen havo-5 en vwo-5/6, 'een héle dag wiskunde!' Phew! En terwijl een grote kluwen actievoerende leerlingen van een naburige schoolgemeenschap aan de poort van mijn school rammelt, keren onze eigen bovenbouwleerlingen na het even aangezien te hebben al snel terug naar hun werkplekken, naar de intrigerende problemen die het Freudenthal Instituut dit jaar presenteerde in het kader van de Wiskunde A-lympiade en de Wiskunde B-dag. Om vier uur leveren ze hun werk in, moe maar voldaan: 'Dank u wel, mevrouw, voor de leuke dag!' Natuurlijk, de gevulde koek en het pizzabroodje hebben mede bijgedragen aan de goede sfeer – maar ook (en zeker niet in de laatste plaats) de discussies binnen de groepjes over een handige wiskundige aanpak van de beide open problemen die op die dag centraal stonden. Onderwijstijd!

Ophokken of...
In de discussie over onderwijstijd duiken regelmatig de 'nutteloze ophok-uren' op. Natuurlijk, door veel scholen wordt deels aan de urennorm tegemoet gekomen door leerlingen in grote groepen 'aan het huiswerk' bij elkaar te zetten zonder een nuttige invulling te geven aan die aldus gerealiseerde onderwijs(?)-tijd, en zonder dat er sprake is van veel inhoudelijke begeleiding. Zo goed als zinloos. Maar dat betekent volgens mij niet, dat die tijd dan maar geschrapt moet worden. Minder is toch niet automatisch beter? Op dit moment heeft of neemt de modale Nederlandse leerling buiten schooltijd toch al zo weinig tijd voor z'n schoolwerk. Vooral de vaak omvangrijke baantjes eisen hun tol. Dat laatste is trouwens een maatschappelijk probleem dat niet een-twee-drie op te lossen valt, maar ik vrees dat een reductie van de onderwijstijd op school niet gecompenseerd zal worden door een uitbreiding van de leertijd thuis. Het lijkt me juist van belang vast te houden aan 'veel' onderwijstijd, maar die dan wél te voorzien van een kwalitatief hoogstaande (vakinhoudelijke) invulling. Dat is ook waar veel leerlingen en studenten juist om vragen! Tsja, dat kost ons als maatschappij een paar centen… maar als we de kwaliteit van het Nederlandse onderwijs willen verbeteren, zullen we moeten investeren.

Effectief onderwijs en actieve leertijd
Overigens, allerlei onderzoek wijst uit dat 'actieve leertijd' een belangrijke component is van effectief onderwijs. Het gaat dan enerzijds wel degelijk om de blote hoeveelheid tijd die aan leren en onderwijzen besteed wordt ('gelegenheid om te leren'), anderzijds om relevantie, moeilijkheidsgraad en 'zinvolheid' van de leeractiviteiten. Naarmate die actieve leertijd groter is, kan de leerling in het algemeen tot betere prestaties komen. Een open deur, zou je zeggen, maar toch! Aanvullende gunstige factoren voor betere prestaties zijn een systematische terugkoppeling naar de leerling van diens vorderingen in het leerproces (dus niet eindeloos wachten met toetsen) en structurering van leertaken. Voor de goede orde: dat laatste is wat anders dan het kant-en-klaar opdienen van hapklare brokken!

Rechtspositionele hulp
Vanwege haar toetreding tot de CMHF/MHP kan de Vereniging u sinds 1 november jl. hulp bieden bij rechtspositionele (arbeids-)problemen. Daartoe is een overeenkomst aangegaan met een rechtsbijstandsbureau inzake arbeidsconflicten. Voor meer informatie zie pagina 125.

In dit nummer
Heeft u 'm al, het interactive whiteboard? Voor mij is het gebruik ervan nog geen gesneden koek, maar dat het veel mogelijkheden biedt, dat is me inmiddels zo klaar als een klontje! Marjanne de Nijs is een ervaren gebruiker; lees haar enthousiaste en stimulerende bijdrage op pagina 98.
Gerard Koolstra en Jos Andriessen vroegen zich afgelopen najaar af, hoeveel wiskundelessen er op dit moment onder- of onbevoegd gegeven worden, hoeveel er vervallen wegens een tekort aan wiskundedocenten, etc. Ze hielden hierover via hun WiskundE-brief een enquête, en publiceerden aansluitend de resultaten. Het leek ons de moeite waard om die uitkomsten - met toestemming van de twee onderzoekers - ook nog eens in Euclides te publiceren; zie pagina 103. Ook Pauline Vos gaat in haar column 'Feiten en meningen' in op de steeds groter wordende tekorten aan goed-geëquipeerde wiskundeleraren. Daarnaast zijn in dit nummer uiteraard ook nog andere lezenswaardige artikelen, boekentips en wiskundige uitdagingen te vinden voor de komende kerstvakantie. Onderwijstijd is mooi, maar vakantietijd is 'ook niet verkeerd', zoals ze dat in Groningen met gevoel voor understatement weten te benoemen.
Fijne feestdagen gewenst!

Inhoud

Aan dit nummer werkte verder mee: Peter Boelens.

Het digitale schoolbord

LAST OF LUST?

[Marjanne de Nijs]

De 21e eeuw

In 2000 maakte ik een carrière-switch: van techneut en systeembeheerder naar wiskundedocent in het middelbaar onderwijs. Als net uit het bedrijfsleven gestapte zij-instromer had ik het gevoel een aantal jaar teruggeplaatst te zijn in het digitale tijdperk: overheadsheets, knip- en plaktoetsen en roosterwijzigingen die op papier over het gebouw werden verdeeld. Het eerste jaar liet ik het allemaal over me heen komen, eerst maar kennis en ervaring opdoen.

Het tweede jaar kon ik het toch niet laten om met een laptop en een beamer te gaan sjouwen. Elke les opbouwen en aan het einde afbreken om toch maar materiaal op het whiteboard te kunnen laten zien waarvan ik vind dat het de wiskunde in de les beter tot zijn recht laat komen. Er kwam ondersteuning van school, een eigen lokaal en een internetaansluiting. De beamer kreeg een vaste opstelling aan het plafond en werd zonder gezeur vervangen en extra beveiligd, nadat het eerste exemplaar gestolen was. Zelf werd ik daardoor erg gemotiveerd om materiaal te schrijven en verzamelen; steeds meer nieuwe mogelijkheden dienden zich aan. Ook andere collega's waren inmiddels enthousiast en zo konden we ideeën uitwisselen.

Drie jaar geleden mochten we experimenteren met een digitaal schoolbord. De beamer projecteert het beeld nu niet op een gewoon whiteboard maar op een interactief bord. Je hoeft voor het besturen van je laptop niet elke keer naar je toetsenbord toe maar je kunt de computer besturen via het schoolbord. Op dit moment hangt op onze school in ieder lokaal een digitaal schoolbord, docenten zijn bijgeschoold en met name enthousiast gemaakt door vakcollega's van de eigen sectie die een voortrekkersrol gehad hebben.

Als ik langs mijn oude bedrijf ga, vraag ik me af waarom ze hun presentaties nog geven met beamer en laptop en nog niet zo interactief als wij inmiddels doen.

Succes

Waarom is het werken met een digitaal schoolbord zo'n succes geworden bij ons op school? Die vraag kan eigenlijk het best beantwoord worden door te beschrijven wat er allemaal mogelijk is.
Het klaslokaal dient allereerst uitgerust te worden met een computer, beamer en digitaal schoolbord. Vervolgens kan eenvoudig gebruik gemaakt worden van alle software die de afgelopen jaren bij de methodes wordt meegeleverd. Je hoeft niet met een hele klas naar een mediatheek of aparte computerruimte, je integreert het gewoon direct in je les. Als presentaties eenmaal gemaakt zijn, kunnen ze worden uitgewisseld binnen de sectie, en dat levert tijdwinst op. Het bespreken van toetsen is veel eenvoudiger geworden, omdat de toets op het bord wordt geprojecteerd, eventueel met een volledige uitwerking ernaast. Een internetaansluiting in de klas levert talloze mogelijkheden om lessen te verrijken: je kunt kort ingaan op actuele zaken of gebruik maken van de sites die voor je vak bestaan. Wat betreft klassenmanagement: de leerlingenlijst kan worden geprojecteerd, absenten worden snel genotuleerd, eventueel in combinatie met voortgang van huiswerk. Als de school werkt met een elektronische leeromgeving, kan direct in de klas bekeken worden waar gegevens staan, en of leerlingen bijvoorbeeld werkelijk gevraagd materiaal hebben ingeleverd.
Voor elk vak zijn er een groot aantal toepassingen te noemen; ik beperk me hier tot de zaken die ik zelf gebruik in mijn wiskundelessen.

Standaard

Uiteraard kan op een digitaal schoolbord gewoon geschreven worden, maar dan wel met behulp van bijvoorbeeld een speciale elektronische pen. Er zijn echter ook borden die met de vinger worden bestuurd. (Leerling: 'Mevrouw, er komt rood uit uw vinger!')
De achtergrond kan gewoon wit blijven maar ook willekeurig elke andere kleur.
Er kan gekozen worden voor lijntjes of een raster, en ook een coördinatenstelsel kan snel worden opgeroepen; logaritmisch, dubbel-logaritmisch of normaal-waarschijnlijkheidspapier is evenmin een probleem. Meetkundige figuren tover je met een druk op een knop op het bord en een liniaal hoort tot de standaarduitrusting.
Het is zelfs mogelijk elk geschreven woord om te zetten naar getypte tekst. Dat vereist wel wat handigheid.
Daarnaast kan elke toepassing worden opgestart die op de computer staat.
Op deze manier is het mogelijk, even met de klas een studiewijzer door te nemen of een toets te bespreken, een opgave te presenteren die niet in het boek staat, of met behulp van een presentatie weer wat voorkennis op te halen. Al het geschreven materiaal kan worden opgeslagen; dus is het eenvoudig om nog even een voorgaande les terug te halen en te bespreken.

Grafische rekenmachine

Leerlingen in klas 4 moeten leren omgaan met de grafische rekenmachine, liefst zo snel mogelijk. Uiteraard doen ze dat met hun practica, maar tijdens de uitleg van opgaven verwijst een docent regelmatig naar verschillende functies. Op de vraag: 'Waar zit die toets dan?', moesten we vroeger de rekenmachine in de lucht steken en wijzen. Tegenwoordig zet je de grafische rekenmachine vergroot op het scherm van het bord en wijs je niet alleen de juiste toets aan, maar druk je hem ook meteen in om te laten zien wat het effect is. Met behulp van de software van de fabrikant verschijnt er een volledig werkende grafische rekenmachine. Leerlingen laat ik vaak naar voren komen om hun invoer in te toetsen en centraal te bespreken.
Van een functie kunnen bijvoorbeeld tegelijkertijd het functievoorschrift, de tabel en de grafiek worden bekeken en zo wordt het verband duidelijk.
Het is zelfs mogelijk om, met een extra koppeling aan de computer, de inhoud van de grafische rekenmachine van een willekeurige leerling te projecteren en te bespreken. Uiteraard zijn het tenslotte vaak de haakjes en minnetjes die sommen niet laten kloppen.

De genoemde gebruiksmogelijkheden gelden voor de machines van zowel Casio als Texas Instruments.

Begrip

Het opstarten van de les kan met een opwarmertje. Leerlingen zitten met hun hoofd nog bij andere dingen en je wilt de hersencellen toch graag op wiskunde richten. Op internet staan hele korte filmpjes over wiskunde, vaak maar 2 minuten. Ook het snel laten zien van een hersenbreker of visueel grapje werkt goed op het moment dat leerlingen binnenkomen. Soms pluk ik een misleidende advertentie over kansspellen van het internet of scan een krantenartikel met veel aantallen en procenten. Er hoeft niet gekopieerd te worden; het is een kwestie van scannen of direct van internet halen en bespreken. Op actuele zaken kan direct worden ingespeeld door de juiste site er bij te halen. Voor leerlingen is het vaak motiverend om wiskunde in een breder en actueel kader te zien. Zelf heb ik gemerkt dat er hele leuke inhoudelijke gesprekken door ontstaan. Ook kun je gauw een bruggetje slaan naar de stof waarmee ze op dat moment bezig zijn of die binnenkort aan de orde komt.

De wiskundemethodes hebben inmiddels allemaal ict-modules. Opgaven of soms hele paragrafen zijn te vervangen door het werken met een cd-rom. Uitleg daarbij wordt vaak interactief gegeven met een prettige achtergrondstem. Om leerlingen te motiveren de cd-rom ook werkelijk thuis te gebruiken ondersteun ik mijn uitleg graag met materiaal ervan, bijvoorbeeld in een klassengesprek over theorie of over specifieke opgaven. Leerlingen kunnen naar voren gehaald worden om centraal te oefenen, of individueel als de rest van de klas aan het werk is en het kwartje nog niet gevallen is. Het vervangt niet de gewone manier van uitleggen maar voegt wat toe, waardoor leerlingen met verschillende leerstijlen worden bediend.

Geocadabra en Cabri

Om wiskundige principes op dynamische wijze te demonstreren zijn er veel mogelijkheden. Allereerst zijn er op internet veel applets te vinden. Dit zijn interactieve illustraties, in vrijwel elke les in te passen omdat er bij elk onderwerp wel iets te vinden is. Daarnaast is *Geocadabra* zeer geschikt in combinatie met een digitaal schoolbord; ook hiervoor geldt dat voor elk niveau en onderwerp een toepassing is. Illustraties kunnen gewenteld worden of bewegende onderdelen bevatten. Dit leidt tot een beter begrip van onderdelen als meetkunde, analyse en kansrekening. Voor het maken en onderzoeken van meetkundige constructies is ook *Cabri* erg geschikt. Een onderwerp kan ingeleid worden door eerst intuïtief een vermoeden te ontwikkelen en daar vervolgens theoretisch op in te gaan. Ook kan een opgave worden behandeld door stapsgewijs de uitwerking te laten zien. Lessenseries kunnen worden gemaakt en met sectiegenoten gedeeld.

Multiple choice

Ons digitale schoolbord heeft een extra optie en dat zijn stemkastjes; deze zijn draadloos en kunnen aan het begin van de les worden uitgedeeld. Er zitten verschillende toetsen op: een rode en een groene voor 'ja' en 'nee' of 'goed' en 'fout'. Maar ook 6 toetsen met daarop A tot en met F. Met software die bij het bord is meegeleverd of gratis op internet te krijgen is, is het nu mogelijk een quiz te maken. Op dit moment zijn er al verschillende sites die hiervoor kant en klaar materiaal aanbieden. Dat zal de komende jaren toenemen. Theorie is op deze manier terug te vragen. Wij toetsen in de onderbouw vaardigheden met meerkeuzevragen en laten onze leerlingen met de stemkastjes oefenen voordat de proefwerkweek start.

Schoolbreed

Zoals eerder genoemd is het digitale schoolbord onze school in eerste instantie binnen gekomen via een klein groepje collega's dat enthousiast was en er tijd in wilde steken. Toch hangen de borden met ingang van dit schooljaar in alle lokalen en kan iedere collega er mee werken. Dat is uiteraard niet vanzelf gegaan.
Drie jaar geleden is gestart met een klein aantal borden. Deze werden gehangen in de lokalen van docenten die er graag mee wilden werken. Deze docenten werd verzocht tijdens sectievergaderingen hun collega's te laten zien hoe ze gebruik maakten van de digitale borden en wat de mogelijkheden zijn. Met name de secties wiskunde, natuurkunde, scheikunde, biologie en aardrijkskunde hadden een voortrekkersrol. Vorig jaar werden er meer borden opgehangen voor de secties die al materiaal hadden ontwikkeld en collega's die ook de voordelen zagen. Een aantal keer in dat jaar zijn introducties en scholingsactiviteiten georganiseerd waarbij elke collega de kans kreeg te leren hoe het werkt en wat de mogelijkheden zijn. Op studiedagen is er tijd ingeruimd om secties met elkaar te laten oefenen en ideeën uit te wisselen. Een aantal docenten heeft, op verzoek van de oudervereniging, ook voor geïnteresseerde ouders een 'digitale' les verzorgd.
Voordat het schooljaar daadwerkelijk begon, is voor onze nieuwe collega's die over het algemeen onbekend waren met een digitaal bord, ook een cursus gegeven. Met een korte introductie en vervolgens wat tijd

om te oefenen heeft eigenlijk vrijwel iedereen het snel onder de knie. Basisvaardigheid is dat het schrijven onder controle is en het aanzetten van computer en beamer geen probleem oplevert. Andere toepassingen en mogelijkheden zijn niet anders dan de gebruikelijke computervaardigheden zoals een tekstverwerkingsprogramma openen of internet opstarten. Het blijft lastig als het bord niet doet wat je wilt op het moment dat er 32 leerlingen voor je zitten, maar voor noodgevallen hebben we altijd een klein whiteboard hangen naast het digitale bord.

Keuze

In het begin is gestart met een ander merk bord dan waarmee we nu schoolbreed werken. Tijdens het experimenteren door een kleine groep docenten is er met verschillende borden gewerkt om de voor- en nadelen van elke keuze te kunnen bepalen. Door verschillende fabrikanten zijn introducties verzorgd om een goed beeld te krijgen van de verschillen en overeenkomsten. De software heeft diverse toepassingen en een andere vormgeving, maar ook de wijze van het bedienen van een bord is verschillend. Met name over de keuze van het schrijven met een elektronische pen op een hard bord of met je vinger op een zacht bord (touch screen) is goed nagedacht. In het eerste geval is de baas over het bord degene met de pen, in het andere geval kan iedereen die langs loopt het bord bedienen. Een technische voorwaarde is dat het schoolnetwerk voldoende capaciteit heeft; de computers en beamers moeten zonder mankeren werken. Verder hebben wij op onze school het voordeel dat onze systeembeheerders ruimte hebben om problemen direct op te lossen. Ook onze technische ondersteuning heeft als prioriteit dat wij als docenten zonder gedoe gewoon ons werk kunnen doen.

Samenvattend

Er is de afgelopen jaren veel gebeurd op digitaal gebied in onderwijsland. Er is goed lesmateriaal voor de computer ontwikkeld en er zijn talloze ondersteunende sites. Vrijwel elke school werkt met een eigen website en een aantal al met een elektronische leeromgeving. Er ligt nu de mogelijkheid om deze ontwikkelingen de klas en de les binnen te halen. Uiteraard kost het tijd om een aantal zaken onder de knie te krijgen; zo'n digitaal bord lijkt weer een taakverzwaring en energievreter. Toch is met basale computerkennis al veel mogelijk; uiteindelijk levert het meer mogelijkheden binnen de les en kan er efficiënter gewerkt worden binnen de sectie. Reacties van leerlingen zijn positief en het motiveert als ze beter begrijpen wat ze aan het doen zijn of waar de theorie toe leidt. Hun wereld is al digitaal; dus krijgen ze onderwijs dat aansluit bij hun eigen beleving. De wiskunde is niet veranderd, de wijze waarop we het kunnen onderwijzen wel.

De menu-optie 'Lesmateriaal' op de Verenigingssite (*www.nvvw.nl*) geeft een goed beeld van de mogelijkheden. Daarnaast heb ik *www.wiskundemeisjes.nl* als favoriete site; de dames houden mijn klassen vrijwel dagelijks op de hoogte van wetenswaardigheden, actuele zaken, leuke filmpjes en uitdagende puzzels.

Over de auteur

Marjanne de Nijs is eerstegraads docent wiskunde op het Alfrink College te Zoetermeer. Met ingang van 1 januari 2008 wordt zij hogeschooldocent aan de lerarenopleiding wiskunde (bachelor en master) van de Hogeschool Utrecht.
E-mailadres: *nijs0471@planet.nl*

Staffelen

[Sieb Kemme]

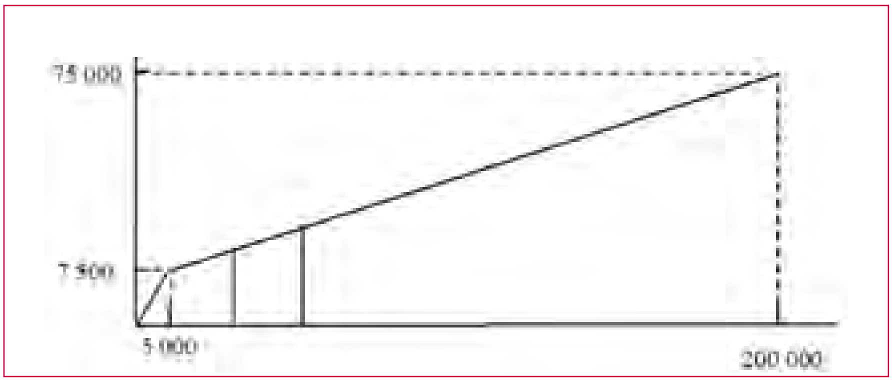
Mijn vaste hardloopmaatje is in zaken. Hij is bezig een nieuw product in de ICT-markt te zetten en is in gesprek met zijn eerste klant. Deze klant wil zijn marketing automatiseren en gegevens van klanten kunnen bewaren. Het kan om grote aantallen gegevens gaan. Hoeveel, is van te voren niet bekend. De klant verwacht in geval van grote aantallen een stevige korting. Na wat onderhandelen komen ze tot de volgende afspraken:

- de eerste 5000 exemplaren kosten € 1,50 per stuk,
- daarna wordt er per volgend 5000-tal een steeds lagere stuksprijs betaald,
- voor afname van 200.000 exemplaren wordt € 75.000,00 betaald en dat bepaalt ook de stuksprijs voor de volgende afname.

'Dat heet staffelen', weet hij me te melden. Zo leer je nog eens wat. Of ik maar even een prijsstelsel wil bedenken voor elk 5000-tal dat aan deze voorwaarden voldoet. Er wordt veel gestaffeld in de financiële wereld. Het schijventarief van de inkomstenbelasting is een staffel. Die is progressief: naarmate je meer verdient betaal je een hoger percentage. Ook literaire uitgeverijen werken vaak met een progressieve staffel: voor de grotere aantallen verkochte boeken ontvangt de auteur een hoger percentage per verkocht exemplaar.

Een lineaire staffel

Tot 5000 exemplaren is de stuksprijs € 1,50. Voor de eerste 5000 betaalt de klant dus € 7500,00. Daarna moet die stuksprijs naar beneden. Een oplossing met een rechte lijn ligt voor de hand. Je weet het beginpunt met coördinaten (5000, 7500) en het eindpunt (20.0000, 75.000). De eindprijs van elk 5000-tal leg je netjes op de lijn door beide punten en klaar is je staffel; ***zie figuur 1***.



figuur 2

Het gaat om 39 intervallen met een totaal verschil van 75000 - 7500 = 67500. Dus per 5000-tal een toename van € 1730,77. De rest van het cijferwerk levert Excel op de cent nauwkeurig. Erg blij wordt mijn collega hardloper niet van deze oplossing. Na de eerste 5000 gaat zijn stuksprijs van € 1,50 naar € 0,35 om vervolgens constant te blijven. Hij wil bij een aantal van 10.000 zijn ontwikkelkosten wel zo'n beetje terughebben.
Die 10.000 leveren hem 7500 + 1750 = 9250 op en dat is te weinig. 'Nou ja', zeg ik, 'de basisgetallen heb je nu, de rest pas je maar met de hand aan.' Met dat antwoord blijk ik zelf ook niet zo tevreden te zijn, want het probleem blijft aan me knagen.

Een exponentiële staffel

Geen rechte lijn dus. In 39 stappen van 5000 gaat het bedrag van 7500 naar 75.000, het tienvoudige. Dat lijkt op een exponentieel verband met groeifactor $\sqrt[39]{10} = 1{,}06$. Excel er weer bijgehaald voor tabel plus bijbehorende grafiek; ***zie figuur 2***.

Dat lijkt helemaal nergens op en dat had ik van te voren ook wel kunnen weten. Een progressieve staffel! De klant gaat per stuk meer betalen naarmate er meer wordt afgenomen. De grafiek moet juist andersom gaan lopen: eerst steil en geleidelijk aan steeds vlakker. Dus een wortelverband, een hyperbolisch verband of een logaritmisch verband. Ik kies voor de laatste, maar had waarschijnlijk net zo goed voor de eerste twee kunnen kiezen.

Een logaritmische staffel

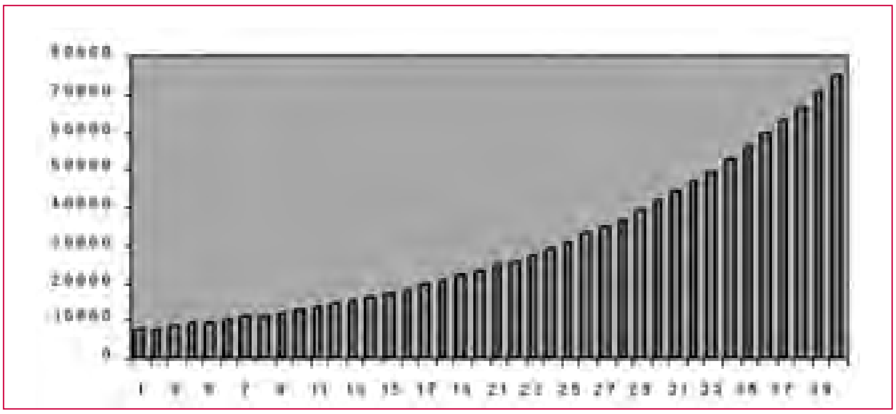
De grafiek van $y = \ln(x)$ heeft een verticale asymptoot bij $x = 0$. Dat kan ik hier niet gebruiken. Omdat de grafiek ook door (0,0) moet gaan ligt de formule $y = a\ln(bx + 1)$ voor de hand. Voor het gemak rekenen we in 39 genummerde stappen van 5000-tallen. Invullen van de punten (1, 7500) en (39, 75000) levert twee vergelijkingen met de onbekenden a en b:

$$\begin{cases} 7500 = a\ln(b+1) \\ 75000 = a\ln(39b+1) \end{cases}$$

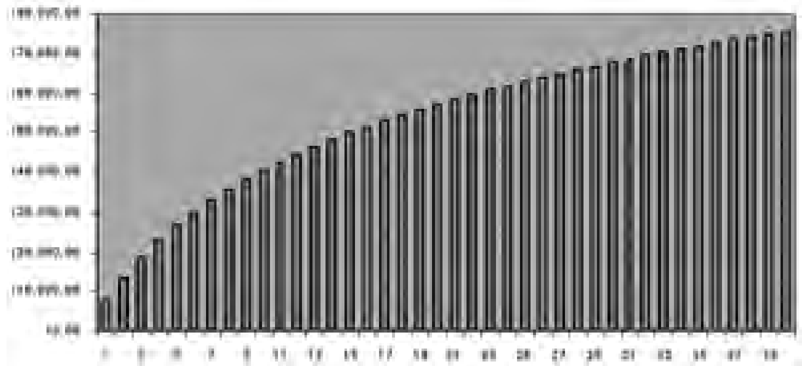
Op elkaar delen geeft direct:

$$\frac{\ln(39b+1)}{\ln(b+1)} = 10$$

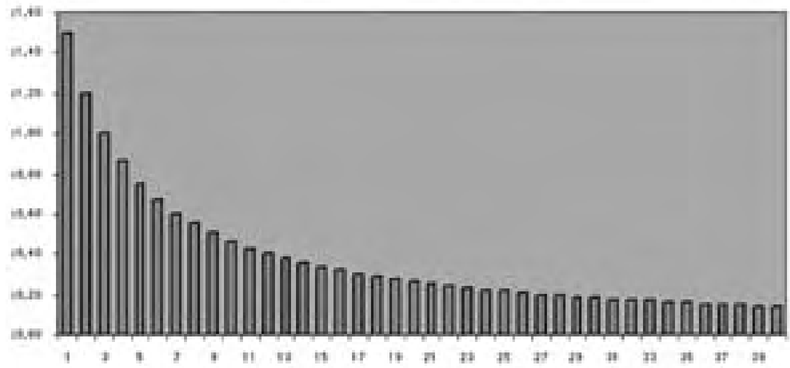
Of: $\ln(39b + 1) = 10 \cdot \ln(b + 1)$.
Links en rechts tot de e-macht verheffen: $39b + 1 = (b + 1)^{10}$.
Een vergelijking met b als enige onbekende. Een rechte lijn die de grafiek van een machtsfunctie snijdt. Er is precies één snijpunt. De vergelijking is niet met algebra op te lossen. Dan maar weer Excel erbij gehaald en met tabellen het snijpunt voldoende nauwkeurig bepaald: $b = 0{,}28$.
Invullen in de eerste vergelijking levert $a = 30.381{,}58$.



figuur 1



figuur 3



figuur 4

De grafiek van de eindbedragen ziet er volgens Excel uit als ***figuur 3***.
Dat ziet er een stuk fatsoenlijker uit.
Dat geldt ook voor de prijs per artikel.
Voor de eerste 25 000 exemplaren gaat het in mooie stappen naar beneden en voor de hele grote aantallen tekent zich een vast tarief af:

5.000	€ 1,50	180.000	€ 0,15
10.000	€ 1,20	185.00	€ 0,15
15.000	€ 1,00	190.000	€ 0,15
20.000	€ 0,86	195.000	€ 0,14
25.000	€ 0,75	200.000	€ 0.14

De grafiek van deze tabel laat dat nog beter zien en is meteen een mooie illustratie van toenamediagrammen; ***zie figuur 4***.
Mijn hardloopmaatje kan tevreden zijn. Ik adviseer nog om bij grotere aantallen ook grotere stappen nemen in plaats van de vaste stap van 5000 exemplaren. Dat mag hij verder zelf uitzoeken.

Tot slot
Al dat gereken had natuurlijk ook met de grafische rekenmachine uitgevoerd kunnen worden. Maar voor iemand die de grafische rekenmachine niet dagelijks gebruikt, blijft dat toch een tamelijk ontoegankelijk apparaat. Bovendien is Excel buiten de schoolmuren een algemeen gebruikt programma. Het kan geen kwaad als leerlingen ook met Excel hun wiskunde leren toepassen. Bovendien levert Excel mooiere grafieken.
Wie mocht denken dat dit allemaal verzonnen is om een mooie som over de verschillende soorten verbanden te maken, die heeft het mis. Alleen de personen zijn van gedaante veranderd, maar de situatie is waar gebeurd. Overigens zitten er nog wel mooie opgaven in:

- Maak een geschikte wortel-staffel.
- Maak een geschikte hyperbolische staffel.
- Vergelijk de drie staffels met elkaar en geef een advies.

Over de auteur
Sieb Kemme houdt zich de laatste jaren vooral bezig met het ontwikkelen van lesmateriaal voor het wiskundeonderwijs en is sinds augustus 2007 projectleider van het cTWO-team.
E-mailadres: *skemme@educadbv.nl*

Enquête arbeidspositie wiskundedocenten

[Gerard Koolstra en Jos Andriessen]

Aanleiding
De redactie van de *WiskundE-brief* heeft eind september, begin oktober 2007 via een online enquête onder de abonnees een onderzoek gedaan naar de toestand van het Nederlandse wiskundeonderwijs in het licht van het toenemend tekort aan gekwalificeerde wiskundeleraren.
Aanleiding was het ongekend grote aantal noodkreten van scholen die vlak voor de zomervakantie nog op zoek waren naar wiskundedocenten. Vooral de vraag naar eerstegraads docenten leek hoog. Daarnaast circuleren er allerlei verhalen over een sterke afname van het aantal eerstegraads bevoegden in het voortgezet onderwijs, en een sterke toename van het aantal wiskundelessen dat onbevoegd wordt gegeven. Verder vroegen we ons af wat er gebeurt wanneer vacatures onvervuld blijven. Worden er lessen niet gegeven? Wordt er overgewerkt? Worden er groepen gecombineerd?
Om wat meer zicht te krijgen op de situatie hebben we een enquête via een webpagina gehouden, en aan onze lezers gevraagd deze 'gedisciplineerd' in te vullen (één respons per school, ook reageren als er weinig aan de hand was).
In het nummer van 14 oktober jl. (nummer 433) konden we de resultaten publiceren.

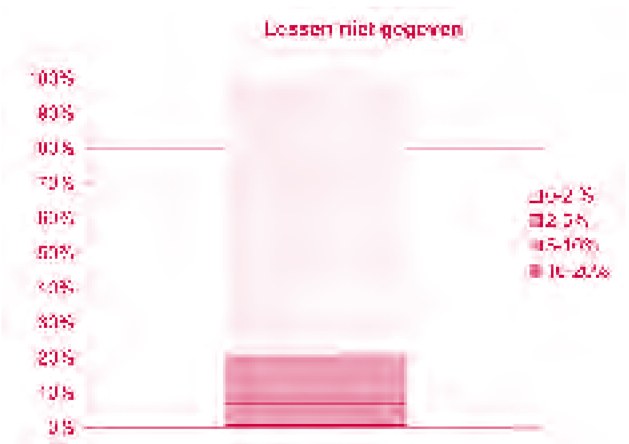
Vooraf
De enquête is ingevuld door ca. 160 mensen. Als het goed is (maar dat kunnen we niet controleren) correspondeert dit aantal met evenveel scholen. Het betreft naar schatting ca. 25% van het aantal scholen met een havo- en/of vwo-afdeling in Nederland. We hebben geprobeerd te voorkomen dat de enquête vooral zou worden ingevuld met gegevens van scholen waar de problemen relatief groot zijn, maar het is lastig om achteraf na te gaan in hoeverre dat gelukt is. De uitkomsten moeten in die zin dan ook met voorzichtigheid gehanteerd worden. Ze geven een indicatie van de problematiek rond het tekort aan wiskundeleraren op dit moment.

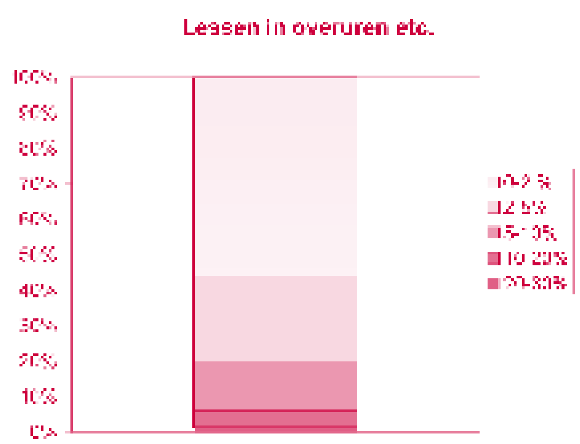
Niet gegeven lessen
Bij minder dan 80% van alle scholen is de situatie optimaal.
Ervan uitgaand dat normaal is dat alle lessen worden gegeven, is het zorgelijk dat op zo'n 20% van de scholen lessen meer dan incidenteel uitvallen omdat er onvoldoende wiskundeleraren beschikbaar zijn. In zo'n 7% van de scholen is er zelfs sprake van een uitvalpercentage van meer dan 5.

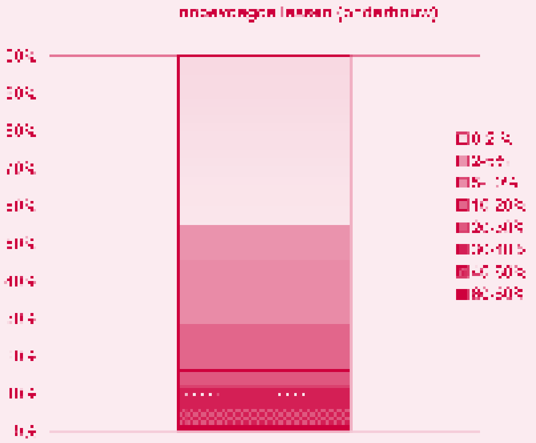
Overuren en samenvoegen groepen
Bij meer dan 40% van alle scholen komt dit voor.
Een manier om te voorkomen dat leerlingen geen of minder les hebben, is andere docenten extra uren te laten geven, of groepen samen te voegen die anders apart les zouden hebben. In meer dan 40% van de scholen speelt dit. In 20% van de gevallen gaat het om meer dan 5% van de lessen, soms aanzienlijk meer.
Op basis van de individuele gegevens kunnen we concluderen dat bij meer dan de helft van de scholen meer dan incidenteel sprake is van niet-gegeven lessen en/of overuren. In ca. 12% van de gevallen gaat het om meer dan 10% van de wiskundelessen die niet op een 'normale' manier worden gegeven.

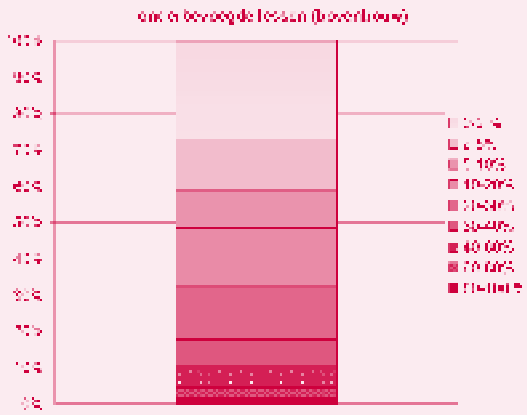
Onbevoegde leraren in de onderbouw
In ca. 55% van alle scholen geven onbevoegden les in de onderbouw.
Het is bij lange na geen uitzondering dat wiskundelessen in de onderbouw havo/vwo worden gegeven door docenten die niet bevoegd zijn. Niet zelden gaat het zelfs om tientallen procenten.
Op basis van de individuele gegevens kan (rekening houdend met de leerlingenaantallen) een schatting gemaakt worden van het aantal wiskundelessen dat in de onderbouw onbevoegd wordt gegeven: bijna 10%. Er zijn grote verschillen. Bij 45% van de scholen speelt het niet of nauwelijks, bij ca. 12% van de scholen gaat het om meer dan 30% van de wiskundelessen.

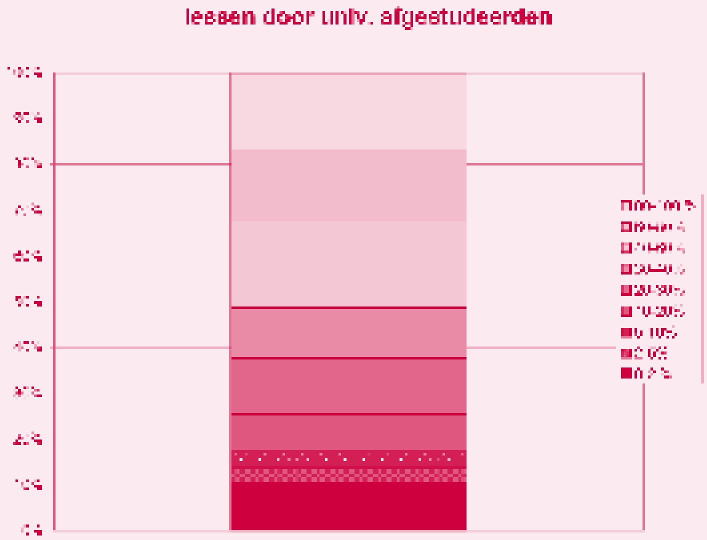
Bovenbouwlessen door niet-eerstegraders
In 3 op de 4 scholen geven onderbevoegden les in de bovenbouw.
De uitkomsten bevestigen de indruk dat een groot aantal lessen in de bovenbouw











wordt gegeven door docenten zonder eerstegraads bevoegdheid. Het gaat om gemiddeld ca. 16% van de lessen, met behoorlijke uitschieters naar boven. In ruim 10% van de gevallen gaat het om meer dan 40% van de lessen. De scholen waar (praktisch) alle lessen in deze sector door eerstegraads docenten worden verzorgd zijn in de minderheid - nauwelijks meer dan 25%. Docenten met een afgeronde universitaire opleiding spelen kwantitatief geen dominante rol meer in de bovenbouw. Circa 55% van de lessen wordt gegeven door leraren zonder deze opleiding. Op heel wat scholen is de rol van universitair-opgeleide wiskundedocenten marginaal. In 25% van de gevallen nemen zij minder dan 20% van de wiskundelessen in de tweede fase voor hun rekening.

Regionale verschillen

Het lijkt erop dat de situatie in het noorden en westen van het land wat ernstiger is dan in het zuiden en oosten. Zo wordt in het westen naar schatting 11% van de wiskundelessen in de onderbouw onbevoegd gegeven, en in het zuiden 'slechts' 7%.
In het noorden wordt maar liefst 22% van de lessen in de bovenbouw gegeven door docenten zonder eerstegraads bevoegdheid, in het oosten is dat ongeveer 12%.
In het noorden worden opvallend veel lessen gegeven in overuren of gecombineerde groepen (ca. 5%), tegen bijvoorbeeld 2% in het zuiden.

Voorzichtige conclusies

De enquête die we gehouden hebben, heeft niet de pretentie representatief te zijn. Het is goed mogelijk dat, ondanks onze oproep om ook te reageren als er weinig aan de hand lijkt te zijn, 'probleemscholen' oververtegenwoordigd zijn. Anderzijds gaat het om de situatie in het schooljaar 2007-2008, terwijl de voorspellingen uitwijzen dat de echte problemen nog vóór ons liggen.
Tegen deze achtergrond zijn de uitkomsten van de enquête op zijn minst verontrustend. Nu al worden veel lessen gegeven door mensen die daarvoor niet de juiste bevoegdheid hebben. Daarnaast is de pijn, zoals vaker, ongelijk verdeeld. Bij sommige scholen (zo'n 20% in onze steekproef) is weinig aan de hand, bij andere zie je op meerdere fronten problemen. Bij ongeveer een kwart (ruwe schatting) van de scholen in onze steekproef wordt meer dan de helft van de lessen gegeven op een niet-optimale wijze: zonder de juiste bevoegdheid of als extra belasting voor de leerkracht.

Noot

De resultaten van deze enquête werden eerder gepubliceerd in de *WiskundE-brief* (nummer 433) van 14 oktober 2007.

Over de auteurs

Jos Andriessen en Gerard Koolstra vormen de redactie van de *WiskundE-brief*, waarvan het archief te vinden is op de website *www.wiskunde-brief.nl*.
E-mailadressen: *j_andriessen@wanadoo.nl* en *g.koolstra@chello.nl*

Steunpunt TU/e: Wiskunde in Wetenschap

[Hans Sterk]

Inleiding

De vernieuwingscommissie cTWO heeft het hoger onderwijs uitdrukkelijk uitgenodigd actief betrokken te zijn bij het nieuwe vak Wiskunde D. Inmiddels zijn op verscheidene plaatsen regionale steunpunten in het leven geroepen, onder andere aan de Technische Universiteit Eindhoven. In het kader daarvan is daar afgelopen jaar een groep docenten van vwo-scholen uit het zuiden, Fontys Lerarenopleiding Tilburg, en de TU/e aan de slag gegaan om aan deze betrokkenheid gestalte te geven: de 'kerngroep'. Aan de TU Delft, de Universiteit Twente en de Radboud Universiteit Nijmegen en ook elders zijn vergelijkbare groepen actief; met de eerste drie werken we nauw samen binnen het samenwerkingsverband *T(R)U's*.

Bij het steunpunt zelf is ook Fontys Lerarenopleiding Tilburg actief betrokken. In onze kerngroep werken we aan de ontwikkeling van diverse programmaonderdelen en in het bijzonder aan het domein 'Wiskunde in Wetenschap'. Doel is niet zozeer het ontwikkelen van kant-en-klaar materiaal, maar ook het met raad en daad bijstaan bij de invoering van Wiskunde D op school, docenten aan te zetten zelf het roer in handen te nemen, kortom het creëren van een platform waarin voortgezet en hoger onderwijs gezamenlijk permanent betrokken zijn bij Wiskunde D en, in het verlengde daarvan, misschien in de toekomst ook wel bij de andere wiskundevakken.

Hieronder lichten we onze activiteiten ten behoeve van Wiskunde in Wetenschap toe. Via het werk van ons steunpunt raken hopelijk meer en meer wiskundesecties op de een of andere manier betrokken. Via de website *www.win.tue.nl/wiskunded* kunt u een kijkje nemen bij wat het steunpunt momenteel aan materiaal te bieden heeft. (Voor sommige materialen dient u, gratis, een account aan te vragen.) Via *www.wiskundedsteun.nl* kunt u zien wat Twente, Nijmegen en Delft bieden.

Wiskunde in Wetenschap: cryptografie en getaltheorie

Via het domein Wiskunde in Wetenschap zien we een mogelijkheid leerlingen kennis te laten maken met wiskunde als levende wetenschap met een centrale rol in de bèta-wetenschappen. In onze ogen leent cryptografie zich hier uitstekend voor, een actief wetenschapsgebied dat zich tot over de grenzen van de wiskunde uitstrekt en meerdere kanten van wetenschapsbeoefening laat zien. Het gebied is toegankelijk en aantrekkelijk voor scholieren, en we hebben een korte lijn naar het wetenschappelijk bedrijf via de actieve groep onderzoekers op het gebied van crypto bij de faculteit Wiskunde en Informatica. Ook is er natuurlijk de nodige ervaring aan de TU/e met onderwijs aan studenten op het gebied van crypto.

Hoe zijn we begonnen? Vorig schooljaar hebben we het thema crypto op twee van de in dat jaar georganiseerde scholingsbijeenkomsten (in het kader van Wiskunde D) aangesneden. In oktober verzorgden Bram van Asch en Henk van Tilborg een oriëntatie op het gebied van crypto. Met de input van deze bijeenkomst en eerdere ervaringen met masterclasses gingen leden van de kerngroep aan de slag om een module cryptografie te ontwerpen. Op de scholingsbijeenkomst afgelopen juni bespraken we het (voorlopige) resultaat. Dit schooljaar staat in het teken van het experimenteren met het materiaal en het via bijvoorbeeld gastlessen en masterclasses in contact brengen van leerlingen met het hoger onderwijs en het wetenschappelijk onderzoek.

Laten we de rol die wij voor crypto zien in het domein Wiskunde in Wetenschap, nader toelichten. Cryptografie is een bloeiend wetenschapsgebied waarin wiskunde, informatica, elektrotechniek en natuurkunde samenkomen. En als je naar de maatschappelijke impact kijkt, kun je ook moeiteloos economische en juridische aspecten aanwijzen omdat modern elektronisch dataverkeer zonder cryptografie inmiddels ondenkbaar is. In de module staat de wiskunde voorop, maar we willen uiteindelijk ook aan andere aspecten aandacht besteden: informatica, elektrotechniek en natuurkunde. De module die momenteel gereed is voor gebruik, is vooralsnog beperkt tot het wiskundige deel.

Met welke kanten van wetenschapsbeoefening kun je leerlingen dan laten kennismaken? Allereerst met de 'zuivere wiskunde'. Cryptografie is een succesverhaal van de klassieke getaltheorie. Lange tijd is getaltheorie beoefend vanwege de interne uitdagingen van het gebied en met een ondergeschikte rol voor toepassingen. Inmiddels vormen de crypto-toepassingen een enorme drijfveer voor verdere ontwikkeling. Cryptografie leunt dus op de klassieke getaltheorie, een typisch wiskundig bouwwerk. In ons materiaal maken vwo'ers kennis met deze 'zuivere wiskunde' in de vorm van stellingen en bewijzen rondom deelbaarheid, factoriseren en modulo-rekenen. Deze getaltheorie laat zien hoe wiskunde als wetenschappelijke activiteit kan functioneren: door nieuwsgierigheid, vragen stellen en experimenteren patronen bij getallen opsporen, en door redeneren eigenschappen afleiden. Overigens, in de hedendaagse cryptografie onderzoekt men vooral ook andere aan getallen verwante structuren, zoals eindige lichamen en elliptische krommen.

Daarnaast is met cryptografie onlosmakelijk de algoritmische kant van de wiskunde verbonden, de zoektocht naar efficiënte algoritmen om berekeningen geautomatiseerd uit te voeren. Hier kun je met een algoritmische bril op kijken naar de manier waarop je bijvoorbeeld getallen optelt, vermenigvuldigt of omzet in een ander getalsysteem (2-tallig bijvoorbeeld), of

naar priemgetallen zoekt (via de zeef van Eratosthenes bijvoorbeeld). Zo is machtsverheffen efficiënter uit te voeren met behulp van herhaald kwadrateren. Ook aan het algoritme van Euclides ter bepaling van de grootste gemene deler van twee gehele getallen kun je de vraag koppelen naar het aantal benodigde rekenstappen en dus naar de snelheid. Samen met informatici zoeken wiskundigen naar betere algoritmen, een zoektocht waarin andere kanten van de wiskunde boven komen. Trouwens, juist de traagheid van algoritmen heeft cryptosystemen mogelijk gemaakt: de theorie zegt wel dat elk positief geheel getal in priemfactoren ontbonden kan worden, maar in de praktijk lukt ons het factoriseren alleen bij relatief kleine getallen. Juist op die praktische onmogelijkheid blijk je cryptosystemen te kunnen bouwen.

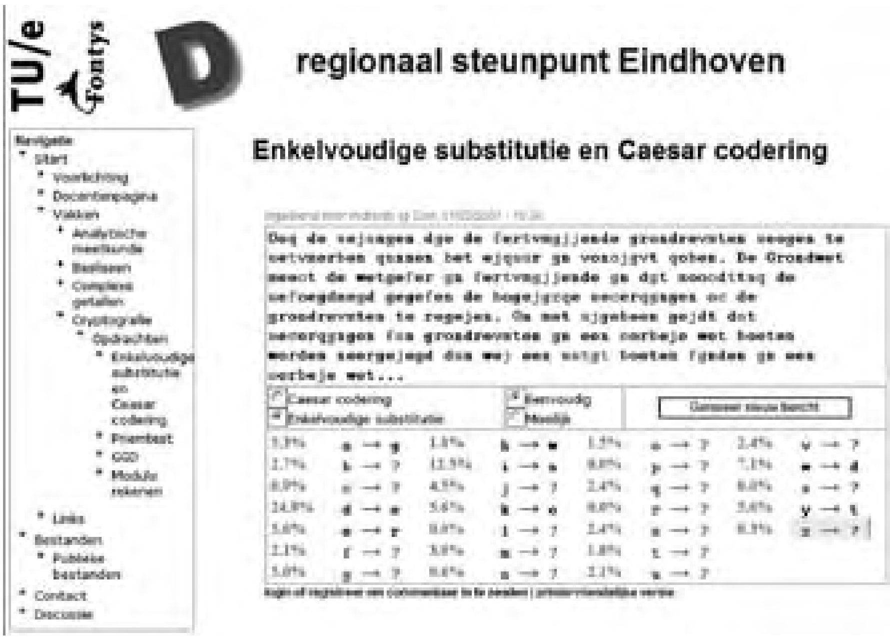
De fysica/elektrotechniek zorgt voor de fysieke implementatie, variërend van het op machines digitaal opslaan van gegevens, tot het daadwerkelijk uitvoeren van algoritmen. Door het toepassingsgebied van de cryptosystemen rijzen hier verrassende vragen. Even terugkomend op het herhaald kwadrateren bijvoorbeeld: omdat kwadrateren sneller gaat dan gewoon vermenigvuldigen, blijkt het mogelijk te zijn dit verschil in snelheid met speciale apparatuur 'af te luisteren'. Kwaadwillenden kunnen dan bijvoorbeeld een geheime sleutel opsporen, als machtsverheffingen daarmee via herhaald kwadrateren verlopen. Bij de elektrotechniek ligt dus onder meer de taak technieken te ontwikkelen die dit afluisteren onmogelijk maken.

Bij het onderwerp cryptografie past ook een discussie over het vele onderzoek dat plaatsvindt naar de deugdelijkheid van systemen. Deze en andere verbredingen van het terrein zie je ook terug in de faculteit Wiskunde en Informatica, waar de cryptologen deel zullen gaan uitmaken van een breder georiënteerde *Security*-groep. Vermeldenswaard zijn ook ontwikkelingen op het gebied van zogenoemde kwantum-computers. Dat zijn (nog niet bestaande) computers die gebaseerd zijn op het gedachte-goed uit de kwantumfysica. Berekeningen op zulke computers zouden ontzettend veel sneller verlopen dan op klassieke computers en tot grote herzieningen op het gebied van de crypto leiden, met allerlei maatschap-pelijke gevolgen.

Geheim? Cryptografie en getaltheorie
De module 'Geheim? Cryptografie en getaltheorie' bestaat uit leerlingenmateriaal, waaronder applets op het web, een docentenhandleiding en uitwerkingen. Handleiding en uitwerkingen zijn alleen voor docenten beschikbaar. De module is er in twee varianten. Ze verschillen alleen in het eerste van de drie hoofdstukken. In de ene variant krijgt elke leerling (eventueel in groepjes) de vraag een zekere geheime boodschap te ontcijferen. In de andere variant krijgen leerlingen de opdracht een boodschap bij een medeleerling te krijgen zonder dat andere leerlingen de inhoud kunnen doorgronden, een impliciete uitnodiging dus om zelf een cryptosysteem te bedenken. In dit eerste hoofdstuk komen drie klassieke cryptosystemen aan de orde: Caesar, enkelvoudige substitutie en Vigenère.
Moderne cryptosystemen, zoals het naar de bedenkers Rivest, Shamir en Adleman genoemde RSA-systeem uit de jaren '70 van de vorige eeuw, zijn veelal gebaseerd op getaltheorie. In het tweede hoofdstuk komen daarom met name de voor RSA benodigde onderwerpen aan de orde. Het op een abstract niveau kunnen denken is in het vervolgonderwijs onontbeerlijk, vandaar dat in dit hoofdstuk bewijzen bewust ingebouwd zijn, met nadruk op de eigen activiteit van de leerling: de bewijzen zijn verwerkt in opgaven, waar de leerling stapsgewijs zelf het bewijs levert. Meestal moet de leerling motiveren waarom de diverse stappen gezet kunnen worden.

Het derde en laatste hoofdstuk is gewijd aan het RSA-systeem, nadat eerst het idee van een public-key-systeem is geïntroduceerd. Hierbij beschikt iedere deelnemer over twee sleutels, een openbare en een geheime. Essentieel in dit systeem is uiteraard dat het praktisch onmogelijk is om de geheime sleutel (de inverse van de openbare sleutel) te bepalen. RSA is een voorbeeld van zo'n systeem. Het maakt gebruik van het feit dat het, zelfs met de meest geavanceerde computers, praktisch ondoenlijk is om binnen redelijke tijd een getal van tweehonderd cijfers te ontbinden als dat getal het product is van twee priemfactoren van elk ruwweg honderd cijfers. Door op een slimme manier de getaltheorie van het tweede hoofdstuk toe te passen kan men een praktisch onkraakbaar cryptosysteem bouwen.

Gebruik van de module
De module biedt mogelijkheden voor diverse werkvormen. In principe is het mogelijk dat de leerling deze op eigen kracht en in eigen tempo doorwerkt. Het andere uiterste, de module geheel klassikaal behandelen, is weliswaar mogelijk, maar heeft niet onze voorkeur. Een vorm tussen deze twee uitersten lijkt ons de aangewezen weg. Te denken valt aan het individueel werken aan de opgaven in de klas volgens een door de docent gestuurd tempo ('huiswerk voor de volgende keer is…'). Daarbij zijn leerzame discussies in een klassengesprek goed mogelijk: het bewijs van de



stelling dat er oneindig veel priemgetallen zijn, kan verlopen via vragen als: gegeven drie getallen, verzin een getal dat zeker door alle drie deelbaar is, verzin een groter getal dat zeker niet door deze drie deelbaar is. Ook een werkvorm als DDU (Denken, Doen, Uitwisselen) behoort dan tot de mogelijkheden: bij de bewijsopgaven zou je de leerlingen eerst kunnen vragen er enkele minuten voor zichzelf (zonder enige vorm van overleg) over na te denken, daarna in bijvoorbeeld tweetallen overleggen, om uiteindelijk in een klassengesprek samen de oplossing te componeren.
Variatie in de lessen is bij deze module goed mogelijk. Zo staan op de internetsite *www.win.tue.nl/wiskunded* onder Cryptografie-Opdrachten enkele applets. De meeste dienen ter ondersteuning van de hoofdstukken 2 en 3, maar de applet 'Enkelvoudige substitutie en Caesarcodering' daagt de leerling uit een gecodeerd bericht te ontcijferen. Het is overigens aan te bevelen om leerlingen deze applet enkele keren te laten uitvoeren, zowel met Caesarcodering als met enkelvoudige substitutie, zowel met de gemakkelijke als met de moeilijke varianten. Niet alleen is het leuker, maar ook handiger dan het ontcijferen met alleen potlood en papier. Daarnaast geeft het een goed inzicht in de zwakte van de klassieke cryptosystemen: ze zijn redelijk eenvoudig te kraken.
Verder biedt het onderwerp cryptografie de mogelijkheid om tal van boeiende verhalen rondom dit onderwerp te vertellen. In de docentenhandleiding staan verscheidene ideeën.

Tot slot

Momenteel werken we met de kerngroep ook aan andere modules: 'Complexe getallen' en 'Beslissen'. In 2007-2008 richten we ons op het experimenteren met en het bijschaven van het materiaal. Daarnaast zoeken we naar manieren om de samenwerking vo-ho extra invulling te geven, bijvoorbeeld met gastlessen en computerpractica zoals we nu al bij 'Complexe getallen' doen. Suggesties voor invullingen zijn uiteraard welkom.

Noot

Dit artikel werd namens de kerngroep van de TU/e geschreven door Hans Sterk.
E-mailadres: *sterk@win.tue.nl*

De kerngroep bestaat uit:
Linda Bindels
(Pleincollege Eckart, Eindhoven)
Ingrid van den Bliek
(Mencia de Mendoza, Breda)
Mike Boldy (TU/e)
Felix Borghouts
(Pleincollege Van Maerlant, Eindhoven)
Jan Essers
(Fontys Lerarenopleiding, Tilburg)
Marwane Foujay
(Pleincollege Sint-Joris, Eindhoven)
Gerry van den Heuvel-Verhaegh
(Philips van Horne SG, Weert)
Jacques Janssen
(Strabrecht College, Geldrop)
Wil Kok (Trevianum, Sittard)
John Klok (Maurickcollege, Vught)
Wim Laaper (Koning Willem II, Tilburg)
Marcel Laarhoven
(Sondervick College, Veldhoven)
Ernst Lambeck
(Newmancollege Breda, TU/e)
Marianne Lambriex
(Stedelijk College Eindhoven)
Hans de Leuw
(Augustinianum, Eindhoven)
Theo Saleming (Pius X-College, Bladel)
Hans Sterk (TU/e)
Carolijn Tacken (Zwijsen College, Veghel)

Priemgetallen en de rij van Fibonacci

[Bart Zevenhek]

Inleiding
In het tijdschrift Pythagoras stond in het nummer van januari 2005 de volgende opgave:

> De rij van Fibonacci, waarvan de elementen genoteerd worden met F_i, wordt als volgt geconstrueerd: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, en verder geldt: $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$. Bewijs dat er voor elk positief geheel getal n oneindig veel getallen in de rij van Fibonacci zijn die een veelvoud zijn van n.

Hoe pak je zo'n opgave aan? Je kunt beginnen met de rij van Fibonacci een eind op te schrijven, om vervolgens te onderzoeken of je voor verschillende getallen n een element van de rij kunt vinden dat deelbaar is door n.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

Al doende kun je dan op de volgende observatie komen:
Als n een priemgetal ongelijk aan 5 is, dan is F_{n-1} of F_{n+1} deelbaar door n.
Je ziet dat bijvoorbeeld F_8 deelbaar is door 7 en F_{10} door 11. Ook zie je dat bijvoorbeeld 10 *niet* een deler is van F_9 of F_{11}. De omgekeerde bewering schijnt dus ook waar: *een samengesteld getal n is niet een deler van F_{n-1} of F_{n+1}*. Met behulp van de grafische rekenmachine verifieerde ik beide uitspraken tot aan $n = 200$ en vond steeds dat ze klopten… Zijn we hier op het spoor van een priemtest gekomen, een test om te onderzoeken of een gegeven getal al of niet een priemgetal is? Valt dit te bewijzen?

Ik schreef over dit probleem aan Hendrik Lenstra, hoogleraar aan de Universiteit Leiden, met het verzoek of het mogelijk zou zijn om bij hem als 'Leraar In Onderzoek' dit probleem uit te diepen. Zijn antwoord kwam snel: De ene kant op is te eenvoudig voor twee jaar onderzoek, de andere kant op is niet waar. Niks priemtest. Op puur theoretische gronden had hij al een tegenvoorbeeld van 15 cijfers geconstrueerd. Toch ging ik bij hem aan de slag, met een aan Fibonacci-rijen gerelateerd onderwerp. Bij wijze van voorbereiding zijn we echter begonnen met het onderzoeken van mijn oorspronkelijke vraag. Van enkele resultaten hiervan wil ik in dit artikel verslag doen.

Even terug
Voor de geïnteresseerden wil ik, in het kort, nog even terugkomen op de oorspronkelijke opgave uit het tijdschrift Pythagoras. Als je, bij gegeven n, kijkt naar de resten die je krijgt wanneer je de getallen van de rij van Fibonacci deelt door n, dan blijken deze resten een periodieke rij te vormen. Neem bij wijze van voorbeeld $n = 8$. Dan krijg je de rij:
0, 1, 1, 2, 3, 5, 0, 5, 5, 2, 7, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, …
Het ziet er naar uit dat de rij na 12 stappen repeteert. Valt dat te bewijzen en gebeurt dat voor iedere n?
Neem een willekeurige n. Er zijn na deling door n dan n verschillende resten mogelijk (0 tot en met $n - 1$) en voor een tweetal opeenvolgende resten zijn er dus n^2 mogelijkheden. Als je de resten neemt van de eerste $n^2 + 2$ getallen van de rij van Fibonacci levert dat $n^2 + 1$ opeenvolgende paren op. Minstens twee van deze paren moeten dan identiek zijn. Ieder van deze

5702887
9227465
14930352
24157817
39088169
63245986
102334155
165580141
267914296
433494437
701408733
1134903170
1836311903
2971215073
4807526976
7778742049
12586269025
20365011074
32951280099
53316291173
86267571272
139583862445
225851433717
365435296162
591286729879
956722026041
1548008755920
2504730781961
4052739537881
6557470319842
10610209857723
17167680177565
27777890035288
44945570212853

identieke paren legt de rij erna en ervoor echter vast, vanwege de definitie van de rij van Fibonacci, zodat de overeenkomstige elementen ervoor en erna gelijk moeten zijn. De rij is dus periodiek. Aangezien F_0 gelijk is aan 0, volgen er dus oneindig veel getallen in de rij van Fibonacci die deelbaar zijn door n, namelijk steeds daar waar een rest weer gelijk is aan 0. Hiermee is de opgave bewezen.

Geschiedenis

De Fibonacci-rij ontleent zijn naam aan Leonardo Pisano, bijgenaamd Fibonacci (1170-1240). Kepler (1571-1630) zag het verband tussen de Fibonacci-rij, de gulden snede en het meetkundig gemiddelde: het quotiënt van twee opeenvolgende termen nadert naar de gulden snede verhouding en het kwadraat van een term wijkt één af van het product van de twee naburige termen: $F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1} + (-1)^{n-1}$. Robert Wilson wist dit te bewijzen in 1753.

Binet vond in 1843 een directe formule voor de rij van Fibonacci. Deze formule draagt sindsdien zijn naam, alhoewel De Moivre deze zelfde formule al in 1718 gebruikte! Dat de resten die je krijgt als je getallen uit de rij van Fibonacci deelt door een gegeven getal, een periodieke rij vormen, werd rond 1774 door Lagrange opgemerkt. Rond 1800 was de wiskunde zover gevorderd dat bijvoorbeeld iemand als Legendre moeiteloos de volgende eigenschap had kunnen bewijzen:

Als n een priemgetal ongelijk aan 5 is, dan is F_{n-1} of F_{n+1} deelbaar door n.

In die tijd was er echter nog geen enkele belangstelling voor de rij van Fibonacci. Die belangstelling ontstond pas halverwege de negentiende eeuw en wakkerde na de publicatie van Zeisings boek [7] over Der Goldene Schnitt in 1854 aan tot een romantische verheerlijking van de gulden snede. In 1846 bewees H. Siebeck dat niet alleen de rij van Fibonacci deze eigenschap heeft, maar een veel algemenere klasse:

$N_i = a \cdot N_{i-1} + b \cdot N_{i-2}$, met $N_0 = 0$ en $N_1 = 1$.

Van deze eigenschap zijn vele bewijzen te geven. Hendrik Lenstra bewijst dit met behulp van de ring $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[(1+\sqrt{5})/2]$. Het bewijs dat verderop volgt is tevens zijn idee. Frits Beukers, bekend van het boek 'Getaltheorie voor beginners', baseert een bewijs op matrices. De Nederlander Duparc gaf in zijn proefschrift van 1953 eveneens een bewijs, binnen een veel ruimere context [4]. Onze stelling is daarvan een bijzonder geval. In een dik standaardwerk over de rij van Fibonacci van Thomas Koshy wordt de eigenschap wel genoemd, maar wordt het bewijs te moeilijk geacht! In Hardy & Wright [2] zijn maar liefst twee bewijzen te vinden.

Fibonacci-pseudopriemgetallen

Met behulp van het wiskunde-computerprogramma Magma vond ik al spoedig het kleinste tegenvoorbeeld voor: *een samengesteld getal n is niet een deler van F_{n-1} of F_{n+1}.* Het samengestelde getal 323 (= 17×19) is namelijk een deler van F_{324}. Het is wonderlijk om te zien dat het tot aan 323 zo goed gaat: het priemkarakter van een getal n hangt blijkbaar sterk samen met zijn deelbaarheid op F_{n-1} of F_{n+1}. Getallen als 323 worden Fibonacci-pseudopriemgetallen genoemd. Onder de 10.000 zijn er totaal 13, onder de 250.000 zijn er precies 100. Deze pseudopriemen zijn dus dun gezaaid. Toch wist A. Rotkiewicz in 2003 te bewijzen dat er oneindig veel van zijn! Als priemtest is deze Fibonacci-pseudopriemtest dus vrij nutteloos. F.E.A. Lucas (1842-1891) baseerde echter een uitstekende priemtest voor Mersenne-priemgetallen op eigenschappen van de gulden snede (zie paragraaf 15.5 in [2]).

Enkele (hulp)stellingen

Aan het bewijs van:

Als n een priemgetal ongelijk aan 5 is, dan is F_{n-1} of F_{n+1} deelbaar door n

dat ik hieronder ga geven, gaan enkele bekende stellingen vooraf. Voor de volledigheid zal ik de bewijzen hiervan eerst geven. Verder is enige kennis van modulo-rekenen noodzakelijk. Zo betekent $a \equiv b \pmod{n}$: als je a door n deelt is de rest gelijk aan de rest die je krijgt wanneer je b door n deelt.

Voor een priemgetal p geldt: als $a \cdot b$ deelbaar is door p, dan moet a of b deelbaar zijn door p. In de notatie voor modulo-rekenen wordt dit: $a \cdot b \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow a \equiv 0$ of $b \equiv 0 \pmod{p}$.

Stelling 1. De formule van Binet: $F_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$

Hierin zijn α en β de twee oplossingen van $x^2 - x - 1 = 0$. Hieruit volgt dat $\alpha^2 = \alpha + 1$ en $\beta^2 = \beta + 1$. Volgens de *abc*-formule is dan: $\alpha, \beta = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Bewijs. Laat $G_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$. Dan is $G_0 = 0$ en $G_1 = 1$. Verder geldt:

$$G_{n-1} + G_{n-2} = \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^{n-2} - \beta^{n-2}}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} - (\beta^{n-1} + \beta^{n-2})}{\alpha - \beta}$$

$$= \frac{\alpha^{n-2}(\alpha+1) - \beta^{n-2}(\beta+1)}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{n-2} \cdot \alpha^2 - \beta^{n-2} \cdot \beta^2}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = G_n$$

G_n heeft dus dezelfde recursieve formule en dezelfde beginwaarden als F_n.

Conclusie: $F_n = G_n$.

Stelling 2. Als p priem is en $0 < k < p$, dan is $\binom{p}{k}$ deelbaar door p. Er geldt dan dus:

$\binom{p}{k} \equiv 0 \pmod{p}$.

Bewijs. Voor $k > 0$ is $\binom{p}{k} = \dfrac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 2 \cdot 1}$. Dus:

$$\binom{p}{k} \cdot k(k-1)(k-2)\cdots 2 \cdot 1 = p(p-1)(p-2)\cdots(p-k+1)$$

De rechterkant is deelbaar door p, de linkerkant moet dus ook deelbaar zijn door p. Omdat $k < p$ is $k(k-1)(k-2)\cdots 2 \cdot 1$ niet deelbaar door p. Maar omdat p een priemgetal is moet $\binom{p}{k}$ dan wel deelbaar zijn door p.

Stelling 3. Als p priem is, dan geldt $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$.

Bewijs. Volgens het binomium van Newton geldt:

$(a+b)^p = a^p + \binom{p}{1}a^{p-1}b + \binom{p}{2}a^{p-2}b^2 + \ldots + \binom{p}{p-1}ab^{p-1} + b^p$

Aangezien volgens stelling 2 alle binomiaalcoëfficiënten deelbaar zijn door p volgt:

$(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$

Stelling 4. De kleine stelling van Fermat: Als p priem is en $a \geq 0$, dan geldt: $a^p \equiv a \pmod{p}$.

Bewijs. We bewijzen dit met inductie naar a.

- Voor $a = 0$ geldt $0^p \equiv 0 \pmod{p}$.
- Stel $a^p \equiv a \pmod{p}$ is waar voor zekere a.
- Volgens stelling 3 geldt dan: $(a+1)^p \equiv a^p + 1^p \equiv a + 1 \pmod{p}$.

Dus de stelling is waar voor $a + 1$ en met inductie voor alle a.

Een naïef bewijs

Hieronder volgt een naïef bewijs van:

Als p een priemgetal ongelijk aan 5 is, dan is F_{p-1} of F_{p+1} deelbaar door p.

Wat is een naïef bewijs? Je zou kunnen zeggen: een fout bewijs van een ware stelling. Maar het is iets subtieler: een bewijs dat pas vanuit een hoger standpunt gezien correct blijkt te zijn. De geschiedenis van de wiskunde kent vele naïeve bewijzen, zelfs complete naïeve theorieën.

Bijvoorbeeld een bewijs van de kettingregel: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$, want je kunt d*t* wegstrepen!
In feite was de hele analyse tot halverwege de 19e eeuw een naïeve theorie, met al die differentialen die kleiner waren dan ieder positief getal, maar groter dan 0, en waarmee halsbrekende goocheltoeren werden uitgehaald. Pas in de tweede helft van de 19e eeuw kwam er een goed fundament te liggen onder de analyse. In de 20ste eeuw bleek zelfs het gebruik van differentialen geformaliseerd te kunnen worden.
Een ander bekend voorbeeld is de *naïeve verzamelingsleer* van Cantor. Als gevolg van de daarin ontdekte paradoxen ontstond de *axiomatische verzamelingsleer* van bijvoorbeeld Zermelo-Fraenkel.

Uit het merkwaardige product $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ volgt $a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$.
De stelling van Fermat voor $a = 5$ zegt: $5^p \equiv 5 \pmod{p}$, dus $5^p - 5 \equiv 0 \pmod{p}$. Voor $a = 2$ geeft de stelling: $2^p \equiv 2 \pmod{p}$.
Omdat $0 \equiv 5^p - 5 \equiv \left((\sqrt{5})^p - \sqrt{5}\right)\left((\sqrt{5})^p + \sqrt{5}\right) \pmod{p}$ kun je concluderen dat $(\sqrt{5})^p - \sqrt{5} \equiv 0$ of $(\sqrt{5})^p + \sqrt{5} \equiv 0 \pmod{p}$.
Zodat: $(\sqrt{5})^p \equiv +\sqrt{5}$ of $(\sqrt{5})^p \equiv -\sqrt{5} \pmod{p}$. (*)

Stel nu dat het plus-teken geldt in (*), dan is, mede volgens stelling 3:
$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^p \equiv \frac{1^p + (\sqrt{5})^p}{2^p} \equiv \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, en evenzo $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^p \equiv \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Dus voor de α en β uit stelling 1 geldt modulo p: $\alpha^p \equiv \alpha$ en $\beta^p \equiv \beta$. Uit de formule van Binet leiden we dan af:

$$F_{p-1} = \frac{\alpha^{p-1} - \beta^{p-1}}{\alpha - \beta} = \frac{(\alpha^p/\alpha) - (\beta^p/\beta)}{\alpha - \beta} \equiv \frac{(\alpha/\alpha) - (\beta/\beta)}{\alpha - \beta} = \frac{1-1}{\alpha - \beta} = 0$$

Als daarentegen het minteken in (*) geldt, dan is $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^p \equiv \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ en $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^p \equiv \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Dus voor de α en β uit stelling 1 geldt modulo p: $\alpha^p \equiv \beta$ en $\beta^p \equiv \alpha$.
In dat geval volgt uit de formule van Binet:

$$F_{p+1} = \frac{\alpha^{p+1} - \beta^{p+1}}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^p \cdot \alpha - \beta^p \cdot \beta}{\alpha - \beta} \equiv \frac{\beta \cdot \alpha - \alpha \cdot \beta}{\alpha - \beta} = 0$$

Kortom: in het ene geval is F_{p-1} deelbaar door p en anders is F_{p+1} dat!

Op weg naar een echt bewijs

Wat klopt er nu eigenlijk niet in bovenstaand bewijs? Er worden wat regels van modulo-rekenen gebruikt, maar die zijn vrij eenvoudig hard te maken. Het grote probleem is echter dat $\sqrt{5}$ geen geheel getal is, waardoor modulo-rekenen *helemaal geen betekenis* heeft! Dat het bewijs fout moet zijn, zie je trouwens al aan het feit dat de uitzondering 5 er niet uit komt! Wat gebeurt er als $p = 5$? Dan geldt: $5^2 \equiv 5 \equiv 0 \pmod{5}$, dus $\sqrt{5} \equiv 5 \equiv 0$. Dan gaat de formule van Binet al fout, immers daar deel je door $\sqrt{5}$ en delen door 0 mag niet. Ook zie je dat in (*) zowel het plus- als het minteken geldt!
Hoe kunnen we nu hieruit een geldig bewijs destilleren? De volgende wegen kunnen ingeslagen worden:

1. Probeer een geschikte kandidaat te vinden voor $\sqrt{5}$. Dit lijkt onmogelijk met gehele getallen, maar bij het modulo-rekenen is meer mogelijk dan je denkt. Neem p bijvoorbeeld gelijk aan 11. Dan is $4^2 = 16 \equiv 5 \pmod{11}$. Dus 4 is een goede kandidaat voor $\sqrt{5}$ als je modulo 11 werkt. Volgens de stelling van Fermat is $4^{11} \equiv +4 \pmod{11}$. Kortom, bij (*) zitten we in de plus-situatie, en het bovenstaande bewijs, waarbij je $\sqrt{5}$ vervangt door 4, laat zien dat F_{10} deelbaar is door 11.
In het algemeen gaat dit goed als 5 te schrijven is als een kwadraat modulo p. Volgens de *kwadratische reciprociteitswet* (zie paragraaf 11.1 in [1]), een van de kroonjuwelen van de getaltheorie, is dit het geval als $p \equiv 1$ of $p \equiv 4 \pmod{5}$.
Zo is in te zien dat als een priemgetal p als laatste cijfer een 1 of een 9 heeft, p een deler is van F_{p-1}. In de andere gevallen blijkt p dan een deler te zijn van F_{p+1}, alleen volgt dat niet uit bovenstaand bewijs. Dan zijn krachtiger middelen nodig.

2. In de algebra van groepen, ringen en lichamen is het mogelijk om de ring $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (waarin binnen de ringentheorie het rekenen modulo n plaats vindt) uit te breiden, zodanig dat $\sqrt{5}$ keurig een plaatsje krijgt. In deze ring is er weinig meer aan te merken op bovenstaand bewijs.

3. Als bij de formule van Binet alle haakjes met het binomium van Newton zorgvuldig uitgewerkt worden en de ontstane vorm vereenvoudigd wordt, blijken alle wortels weg te vallen. Als je het resultaat dan modulo p neemt, met behulp van bovenstaande stellingen vereenvoudigt, kwadrateert en de formule $F_n^2 = F_{n-1} \cdot F_{n+1} + (-1)^{n-1}$ gebruikt, volgt het bewijs op elementaire manier. Het eerste bewijs uit het boek van Hardy & Wright slaat deze weg in. De lezer wordt uitgedaagd deze weg zelf af te leggen.

Tot slot

Over het gedrag van de rij van Fibonacci modulo n valt nog veel meer te vertellen. Zo is het interessant om te kijken naar de periode van F_k modulo n en naar de kleinste $k > 0$ waarvoor $F_k \equiv 0 \pmod{n}$.
Laten we die periode even *periode*(n) noemen, en die kleinste $k > 0$ waarvoor $F_k \equiv 0 \pmod{n}$ noemen we $k(n)$. Dan blijkt dat *periode*(n)/$k(n)$ altijd gelijk is aan 1, 2 of 4. Voor veel situaties is aan te geven welk geval zich voordoet. Zo liet Hendrik Lenstra bijvoorbeeld zien dat voor p priem en $p = 2$ of $3 \pmod{5}$ geldt dat *periode*(p)/$k(p)$ = ggd(4, $p - 1$). Er is echter weinig nieuws onder de zon. In de eerste nummers van 'The Fibonacci Quarterly', een vanaf 1963 uitgegeven tijdschrift dat uitsluitend verhaalt over de eigenschappen van de reeks van Fibonacci, is veel al terug te vinden.
Voor een uitgebreid verslag van mijn onderzoekingen wil ik verwijzen naar het document 'De rij van Fibonacci in *Z*/*nZ*' dat te vinden is op mijn webpagina (*www.math.leidenuniv.nl/~bzeven/*).

Literatuur

[1] Frits Beukers (1999): *Getaltheorie voor beginners*. Utrecht: Epsilon Uitgaven.
[2] G.M. Hardy, E.M. Wright: *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford: Clarendon Press (reproduction of the fifth edition, 1995).
[3] Thomas Koshy (2001): *Fibonacci and Lucas Numbers with applications*. New York: Wiley-Interscience.
[4] H.J.A. Duparc (1953): *Divisibility properties of recurring sequences*. 's-Gravenhage: Excelsior (proefschrift, Universiteit van Amsterdam).
[5] D. van Dalen, H.C. Doets, H.C.M. de Swart (1975): *Verzamelingen; naïef, axiomatisch en toegepast*. Utrecht: Oosthoek, Scheltema & Holkema.
[6] L.E. Dickson (1952): *History of the theory of numbers*. New York: Chelsea (Publications of the Carnegie Institution of Washington).
[7] Adolf Zeising (1854): *Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers*. Leipzig.
[8] Morris Kline (1980): *Mathematics, the loss of certainty*. New York: Oxford University Press.

Over de auteur

Bart Zevenhek is docent wiskunde aan het Barlaeusgymnasium in Amsterdam. Daarnaast is hij als 'Leraar In Onderzoek' sinds augustus 2006 voor een dag per week werkzaam aan de Universiteit Leiden, onder begeleiding van Hendrik Lenstra.
E-mailadres: *bartzevenhek@gmail.com*

Beauty is the first test

[Jeanine Daems]

De schoonheid van de wiskunde is een belangrijk thema in het toneelstuk *A disappearing number* en in Hardy's *A mathematician's apology*.

Een toneelstuk maken over wiskunde ligt niet direct voor de hand. Toch heb ik dit jaar al twee mooie toneelvoorstellingen over wiskunde gezien (die trouwens allebei een vrouwelijke wiskundige ten tonele voerden): *A disappearing number* van de Britse regisseur Simon McBurney (9 juni, theatergroep Complicite, Stadsschouwburg Amsterdam) en *Met een schoolbord en een krijtje* van Theater Adhoc (30 september, Stadsschouwburg Utrecht). In *A disappearing number* wisselen allerlei mooi vervlochten verhaallijnen elkaar af. Het hoofdthema is de schoonheid van de wiskunde. In *Met een schoolbord en een krijtje* blijven Jan en Joke, twee medewerkers van een Mathematisch Instituut, na het werk nog een tijdje hangen. Ze praten over de fascinaties in hun werk en het wiskundig beschrijven van de liefde. Beide voorstellingen waren de moeite waard, maar ik vond *A disappearing number* verreweg de mooiste van de twee.

Foto 1

A disappearing number

De verscheidene verhaallijnen in *A disappearing number* leiden allemaal naar India, en bijna allemaal brengen ze ons bij de schoonheid van de wiskunde. Bij de combinatie wiskunde en India denk je misschien al wel meteen aan de beroemde wiskundige Ramanujan (1887-1920), een kantoorklerk uit India. Ramanujan wist zichzelf te bekwamen in de wiskunde en stuurde zijn ontdekkingen naar enkele Engelse wiskundigen. Eén van hen was G.H. Hardy (1877-1947). Beroemde wiskundigen krijgen vaak brieven van amateurs die denken een grote wiskundige ontdekking te hebben gedaan, dus Hardy was gewend aan dergelijke brieven. Meestal bevatten ze klinkklare onzin, maar deze brief bleef door zijn hoofd spoken. 's Avonds bekeken Hardy en zijn collega Littlewood de brief opnieuw. Hoewel de wiskunde er erg ongebruikelijk uitzag, lukte het steeds beter om te begrijpen wat er stond. En steeds meer raakten ze ervan overtuigd dat ze het werk van een wiskundig genie in handen hadden. Hardy haalde Ramanujan naar Engeland.

Het verhaal van Hardy en Ramanujan is een van de verhaallijnen in *A disappearing number*. We horen en lezen citaten uit Hardy's briefwisseling met Ramanujan en we zien ze samenwerken. Ramanujan verkleumt in Cambridge, we horen de brieven aan zijn familie waarin hij klaagt over het slechte eten: Ramanujan was vegetariër vanwege zijn geloof en tijdens de eerste wereldoorlog waren er in Engeland nauwelijks groenten te krijgen. Uiteindelijk loopt hij tbc op en sterft op jonge leeftijd, terug in India, de wiskunde achterlatend met een boel mooie stellingen zonder bewijzen.
Een andere verhaallijn betreft wiskundeprofessor Ruth en haar man Alex. Ruth reist af naar India om de notitieboeken van Ramanujan te gaan bekijken. Verder zien we een Indiase fysicus die in CERN een lezing geeft over Ramanujans werk en een zakenman uit Los Angeles van Indiase oorsprong die op reis is naar India.

De voorstelling begint zoals een college begint: professor Ruth schrijft een wiskundig bewijs op het bord. Het publiek krijgt onder andere de definities van de zèta-functie en de gamma-functie voorgeschoteld. Het gaat over de reeks $1 + 2 + 3 + \dots$ Ruth 'bewijst' dat die gelijk is aan $-\frac{1}{12}$, wat natuurlijk niet zo is, maar deze redenering was het startpunt van Ramanujans werk aan rijen en reeksen. Want wat was er mis met die redenering?
De verschillende verhalen zijn goed uitgewerkt en mooi met elkaar verbonden, maar ook spelen de acteurs erg goed. De multimediale aanpak van het stuk is verrassend en effectief. De schermen worden afwisselend gebruikt als overheadprojectorscherm, schoolbord, filmdoek en afscheidingsscherm; we zien daarop Ruths bewijs, citaten uit Hardy's *A mathematician's apology*, de beelden van een langsschietende Indiase stad vanuit een taxi, enzovoorts. Veel thema's uit de voorstelling vinden we terug in *A mathematician's apology*, een boek dat Hardy in 1940 op latere leeftijd schreef, toen hij zijn wiskundige vermogens voelde afnemen.

Foto 2

Wiskunde als ontsnappingsmogelijkheid

Het toneelstuk laat zien hoe mensen geraakt kunnen worden door de schoonheid van de wiskunde, maar ook hoe de wiskunde een troost of ontsnapping kan zijn. Wiskundigen hebben namelijk naast de gewone realiteit nog een andere realiteit die daarvan los staat: die van de wiskunde. Zowel Ruth als Hardy gaan op die manier op in de wiskunde, Ruth om met een miskraam om te kunnen gaan en Hardy om door de Eerste Wereldoorlog heen te komen.

Hardy schrijft in zijn *A mathematician's apology*:
When the world is mad, a mathematician may find in mathematics an incomparable anodyne. For mathematics is, of all the arts and sciences, the most austere and the most remote, and a mathematician should be of all men the one who can most easily take refuge where, as Bertrand Russell says, 'one at least of our nobler impulses can best escape from the dreary exile of the actual world.'
En wat Hardy precies bedoelt met die

wiskundige realiteit. heeft hij van tevoren al uitgelegd:
In the first place, I shall speak of 'physical reality', and here again I shall be using the word in the ordinary sense. By physical reality I mean the material world, the world of day and night, earthquakes and eclipses, the world which physical science tries to describe. (…) For me, and I suppose for most mathematicians, there is another reality, which I will call 'mathematical reality'; and there is no sort of agreement about the nature of mathematical reality among either mathematicians or philosophers. (…) I should not wish to argue any of these questions here even if I were competent to do so, but I will state my own position dogmatically in order to avoid minor misapprehensions. I believe that mathematical reality lies outside us, that our function is to discover or observe it, and that the theorems which we prove, and which we describe grandiloquently as our 'creations', are simply notes of our observations.
Ruths man Alex ziet niet zo goed wat de relevantie is van die wiskundige realiteit waar zijn vrouw zo in opgaat, hoewel hij het wel probeert. Hij is dan ook oprecht verbaasd als de fysicus hem vertelt dat Ramanujans wiskunde misschien toch toepassingen heeft in het verklaren van de fysische realiteit, in de stringtheorie.

De wiskundige als kunstenaar

Voor een toneelstuk met als thema de schoonheid en troost van de wiskunde is het verhaal van Hardy heel toepasselijk. Hardy geeft in *A mathematician's apology* een rechtvaardiging voor het doen van wiskunde. Een mogelijke rechtvaardiging is natuurlijk dat wiskunde nuttig is voor een heleboel praktische zaken, maar volgens Hardy gaat dat slechts op voor een beperkt deel, en dan juist voor het saaie en oninteressante deel van de wiskunde.

Waarom vinden we wiskunde zo mooi? Waarom is een bepaald bewijs mooier dan een ander? Hardy probeert het aan de hand van voorbeelden te vatten in zijn boek. Hij probeert ook aan te geven waarom wiskunde voor hem zoveel meer is dan een schaakprobleem, dat op veel punten toch sprekend op een wiskundig probleem lijkt. Hij bekijkt twee bewijzen: het bewijs van Euclides dat er een oneindig aantal priemgetallen is en het bewijs van Pythagoras dat $\sqrt{2}$ irrationaal is. Hij bespreekt een aantal criteria, waaronder schoonheid, diepte en algemene geldigheid.

Foto 3

Foto 4

Maar het is moeilijk om aan te geven waar die schoonheid precies zit; hij noemt een hoge graad van verrassing, zowel als een gevoel van onvermijdelijkheid en efficiëntie. Maar helemaal duidelijk wordt het niet.
Hardy eindigt zijn verhaal met:
I have never done anything 'useful'. No discovery of mine has made, or is likely to make, directly or indirectly, for good or ill, the least difference to the amenity of the world. I have helped to train other mathematicians, but mathematicians the same kind as myself, and their work has been, so far at any rate as I have helped them to it, as useless as my own. Judged by all practical standards, the value of my mathematical life is nil; and outside mathematics it is trivial anyhow. I have just one chance of escaping a verdict of complete triviality, that I may be judged to have created something worth creating. And that I have created something is undeniable: the question is about its value.

The case for my life, then, or of that of any one else who has been a mathematician in the same sense in which I have been one, is this: that I have added something to knowledge, and helped others to add more; and that these somethings have a value which differs in degree only, and not in kind, from that of the creations of the great mathematicians, or of any of the other artists, great or small, who have left some kind of memorial behind them.

Een wiskundige lijkt volgens Hardy op een kunstenaar, ook in een ander opzicht:
A mathematician, like a painter or poet, is a maker of patterns. If his patterns are more permanent than theirs, it is because they are made with ideas. *(…) The mathematician's patterns, like the painter's or the poet's, must be* beautiful*; the ideas, like the colours or the words, must fit together in a harmonious way. Beauty is the first test: there is no permanent place in the world for ugly mathematics.*

Kortom: wie *A disappearing number* niet gezien heeft, heeft een heel indrukwekkende avond gemist die niet alleen leuk was voor de wiskundigen in de zaal: mijn niet-wiskundige vriendinnen die mee waren, vonden het ook heel goed en snappen nu iets beter hoe mensen geraakt kunnen worden door wiskundige schoonheid. Gelukkig zullen jullie, *Euclides*-lezers, dat al wel begrijpen. Bovendien is er nog wat moois te lezen over de wiskunde en haar schoonheid in *A mathematician's apology*.

Noten

- *A disappearing number*, gespeeld door de Britse theatergroep Complicite, werd in Nederland uitgevoerd in het kader van het Holland Festival 2007.
- G.H. Hardy (1940): *A Mathematician's Apology*. Cambridge University Press. Canto edition 1992: ISBN 0 521 42706 1, met voorwoord van C.P. Snow.

Verantwoording foto's

De foto's zijn overgenomen van de website van Complicite (*www.complicite.org/photos/*). Fotografie 1, 2, 4: Robbie Jack, 3: Joris-Jan Bos.

Over de auteur

Jeanine Daems is werkzaam als aio aan de Universiteit Leiden, waar ze onderzoek doet naar de geschiedenis van de wiskundige kristallografie. Samen met Ionica Smeets schrijft ze de weblog *www.wiskundemeisjes.nl.* Bovendien begeleidt ze wiskundige zomerkampen voor scholieren van de stichting Vierkant voor Wiskunde en zit ze in de redactie van Pythagoras, wiskundetijdschrift voor jongeren.
E-mailadres: *jdaems@math.leidenuniv.nl*

Feiten en meningen

[Pauline Vos]

Demografie van wiskunde-docenten

Recursieve statistiek

Dankzij de onderzoeksafdeling van de WiskundE-brief (nr. 433; zie ook het artikel op pagina 103) weten we nu dat er een tekort is aan onszelf, wiskundedocenten. In aansluiting daarop heb ik gezocht naar demografische feiten over onszelf, de huidige wiskundedocenten in Nederland. Dit is geen 'leuke' context voor statistieklessen aan de leerlingen. Het is eerder een soort *recursieve statistiek:* degene die de statistiek bedrijft is tegelijk object van de statistiek.

TIMSS-steekproef klas 2

Ik ben gedoken in de database van de internationale TIMSS-studie. In 1995, 1999 en 2003 werden gegevens verzameld over het Nederlandse wiskundeonderwijs. De studie betrof de tweede klas over de volle breedte van het voortgezet onderwijs, dus van lwoo tot en met vwo. Een *random* steekproef van leerlingen kreeg een toets voorgelegd, maar daar gaat het hier niet om. Van belang is, dat de wiskundedocenten van de klassen een enquête kregen voorgelegd. Deze steekproef vertegenwoordigt dus de docenten die wiskunde verzorgen in de tweede klas. De steekproef vertegenwoordigt natuurlijk niet de hele populatie wiskundedocenten, want bijvoorbeeld veel eerstegraders geven eerder in hogere klassen of in het hbo les. De steekproef vertegenwoordigt ook niet de populatie NVvW-leden, want daar zit een aanzienlijke groep gepensioneerden bij. De TIMSS-steekproef geeft echter een representatief beeld van de actieve docenten die wiskunde geven aan tweede klassen.

De metingen zijn om de vier jaar herhaald en daardoor ontstaat een trend van drie achtereenvolgende metingen. Helaas kan deze trend niet goed voortgezet worden, omdat de vierde meting, TIMSS-2007, niet in de tweede klassen is afgenomen (maar wel in groep 6 van de basisschool). Overigens wil ik de docenten die hebben meegewerkt aan de enquête hartelijk bedanken. Het invullen van die persoonlijke gegevens is saai en je ziet als individu weinig resultaat van het invulwerk. Maar de invullers kunnen zich nu in Tabel 1 terugvinden!

	1995	1999	2003
grootte steekproef	n =147	n =113	n =121
percentage fulltimers	48	49	39
percentage vrouwen	23	30	33
Leeftijdopbouw (in percentages)			
- jonger dan 29 jaar	10	15	18
- 30 tm. 39 jaar	32	18	15
- 40 tm. 49 jaar	45	42	44
- 50 tm. 59 jaar	12	24	24
- 60 jaar of ouder	1	1	

Tabel 1: Kenmerken van tweedeklas docenten wiskunde in 1995, 1999 en 2003.

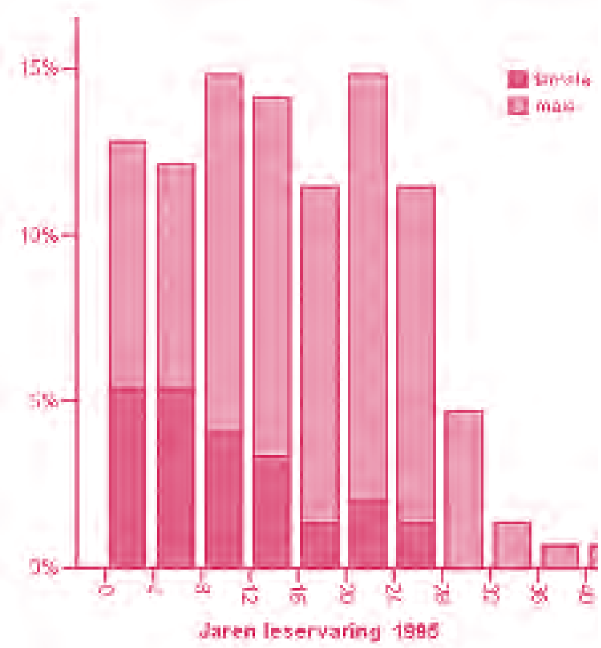
Wat zien we

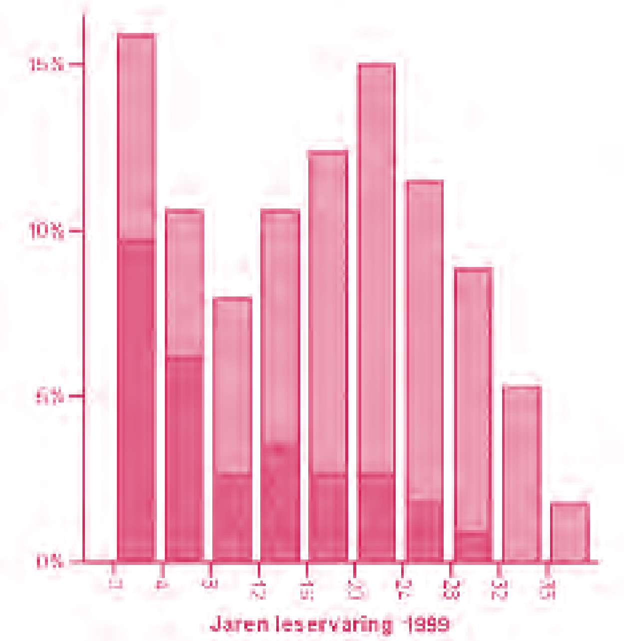
Opvallend: tussen 1995 en 2003 is het aantal vrouwen toegenomen en het aantal full-timers afgenomen. Ook zien we dat het percentage docenten jonger dan 30 toeneemt. Dit kan verband houden met de *groenpluk:* het binnenhalen van studenten uit de lerarenopleidingen. We zien ook dat de vijftigers in aantallen toenemen. Als je in de docentenkamer rondkijkt, zal dit niemand verbazen. Een andere belangrijke groep, die tussen 30 en 40 jaar oud, neemt echter in aantallen af. Dit is een opvallend, en wat mij betreft alarmerend fenomeen.

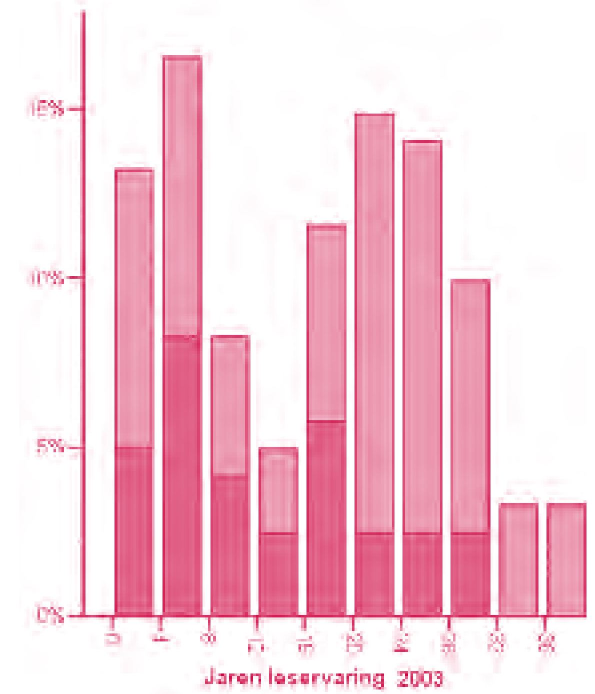
In de enquête werd ook gevraagd naar de leservaring in jaren. Voor deze variabele heb ik drie histogrammen gemaakt: voor 1995, 1999 en 2003, zodat we de ontwikkeling in de tijd kunnen zien. In de histogrammen staat de leservaring in een klassenverdeling van vier jaar. Door deze keuze schuiven de mensen in één groep in een grafiek precies één balkje op in de onderstaande grafiek. Bijvoorbeeld de groep wiskundedocenten in 1995 met 0-3 jaar leservaring is vier jaar later, in 1999 dus, doorgeschoven naar de groep met 4-7 jaar leservaring.
In 1995 was de leservaring nog zeer gespreid. Alle balkjes zijn ongeveer even hoog. In de jaren erna ontstaat een kloof, die vervolgens uitdiept. Het begin van het 'gat' schat ik ongeveer bij de docenten die in 1985 in het onderwijs begonnen. Weet u nog? Teruglopende leerlingaantallen waardoor de nieuwkomers er snel weer uitvlogen.
En de HOS-nota: verlaagde aanvangssalarissen terwijl degenen die al in het onderwijs zaten, hun salaris behielden.
Als ik naar de grafieken kijk, dan kan ik vier groepen herkennen. Er zijn degenen, die sinds de jaren '80 het onderwijs trouw zijn en nu opschuiven richting pensioen. Daarnaast zijn er degenen uit het 'gat', die zijn verdwenen richting management, APS, bedrijfsleven of hoger onderwijs. Of gingen ze in Afrika lesgeven (zoals ik)? De derde groep bestaat uit de nieuwe docenten die recenter in het wiskundeonderwijs zijn komen werken, zowel mannen als vrouwen. Ik vind het hoopvol dat zij erbij gekomen zijn. De vierde groep staat niet in de grafiek, maar bestaat uit de aankomende docenten. Hoeveel zouden er daarvan zijn?

Het alarmerend tekort

Terug naar de tekorten waarover de WiskundE-brief ons alarmeerde: wat kunnen we daaraan doen? De Commissie Rinnooy Kan kreeg deze vraag voorgelegd en vroeg 114 deskundigen naar hun mening. Daaronder waren zeven studenten aan lerarenopleidingen, achttien PO-VO-BVE-docenten, en voor de overgrote rest (78%) waren het 'experts': flankerende mensen in de schoolleiding, inspectie, vakbonden, uitgeverijen, hoger onderwijs enz. De commissie geeft vervolgens als antwoord: beloning naar kwaliteit (salarissen gerelateerd aan diplomering).







Ikzelf denk dat één recept geen rekening houdt met verschillen tussen de deelgroepen. Hierbij denk ik aan de aankomende collega's: hoe kunnen we hen werven? En hoe kunnen wij hen vervolgens behouden als zij dertigers worden, ongeveer acht jaar voor de klas hebben gestaan en een *carrière move* overwegen? De groep van aankomende en jongere collega's wordt slecht vertegenwoordigd binnen vakbonden of beroepsverenigingen, maar is wel van levensbelang voor de toekomst van het onderwijs, ook voor het wiskundeonderwijs. Willen zij een beter salaris? Kinderopvang? Kleinere klassen? Uitdagend werk? En wat is dat, 'uitdagend werk'? Kortom: ikzelf hoor ook bij die flankerende mensen met een mening, en daarom pleit ik voor een behoeftenonderzoek onder jonge docenten. Want alleen met hen kun je een beleid voeren dat gericht is op de toekomst.

Over de auteur
Pauline Vos was wiskundelerares en lerarenopleider (in Zimbabwe, Mozambique en Nederland) en werkt nu aan de Rijksuniversiteit Groningen.
E-mailadres: *f.p.vos@rug.nl*

Vakantiecursus 2007

[Gert de Kleuver]

Beweging
Aangezien ik in een regio woon die door de vakantiespreiding afgelopen zomer heel laat aan het nieuwe schooljaar mocht beginnen, vond de vakantiecursus dit keer dus echt nog plaats tijdens mijn vakantie. Ik ben deze keer naar Eindhoven gereisd omdat het alweer een tijdje geleden was dat ik daar de cursus had meegemaakt.
Dat er veel oude bekenden kwamen, bleek bij aankomst. Er waren geen wegwijzers, maar iedereen kon je vertellen waar de koffie te halen was en dat de lezingen in zaal 7 van het auditorium zouden plaatsvinden.
De sfeer was goed; men had er duidelijk zin in. Het programma was zeer gevarieerd en had veel koppelingen met schoolwiskunde. Natuurlijk niet met kant en klare kopieer-vellen, maar wel als bron van inspiratie om zelf ideeën uit te werken. Persoonlijk vind ik dat nog steeds de juiste formule. Het thema was dit jaar: *Wiskunde in Beweging*.
Het programma (van vrijdag 15u00 tot zaterdag 15u00) zag er als volgt uit:

- Ontvangst, prof.dr. J.M. Aarts
- Dynamica en systeemidentificatie van biologische netwerken, prof.dr.ir. M.J.T. Reinders
- Waarom de wortel uit -1 bestaat, prof. dr. J. van de Craats
- Dynamica van patronen, prof.dr. A. Doelman
- Een Hollandsche differentiaalvergelijking - de vergelijking van Van der Pol, drs. S.H.P. Garst
- Oscillaties, het complexe vlak en elliptische planeetbanen, prof.dr. J. Hulshof
- Dubbelplaneten, dr. R. Kaenders
- Donder en bliksem, dr. B.J. Meulenbroek
- Complexe dynamica, prof.dr. J.J.O.O. Wiegerinck.

Tijdens de bijeenkomst in Eindhoven werd de lezing van Jan Wiegerinck verplaatst naar de vrijdagavond, ter vervanging van de lezing van Swier Garst.

Veranderende patronen
Ik heb met name op de vrijdag ontzettend genoten van het hoge gehalte van de lezingen. Als ik dit zo schrijf, krijgt u misschien de indruk dat het zaterdag een stuk minder was, maar dat was niet zo - het ene onderwerp interesseert je nu eenmaal meer dan het andere.
Na de zeer goed verzorgde maaltijd hield Arjen Doelman een boeiende lezing over patronen. Hij startte met heel mooie plaatjes. Daarbij werd de vraag gesteld: 'Wat is de dynamica van deze patronen?' Bij een rivier gaat het dan om het begrijpen van het meanderingsproces, bij de begroeiing in de woestijn om het al dan niet optreden van (volledige) verwoestijning. Inzicht in veranderingen in vegetatiepatronen blijkt van groot belang om verwoestijning tegen te gaan.
De kracht van dit betoog was dat er op een goede manier een en ander uitgelegd werd, maar dat voor de wiskundige achtergronden veelal verwezen werd naar de zeer uitgebreide toelichting in de syllabus. Plaatjes kun je goed bekijken op Google Earth: de meanderende rivier in een tropisch regenwoud van Brazilië, een vegetatiepatroon van begroeiing afgewisseld met kale grond aan de rand van de woestijn in Niger. Aanvankelijk had ik even het gevoel: waar gaat deze lezing eigenlijk naar toe - maar zo halverwege begonnen de stukjes te passen. Al met al een prettig te volgen lezing.

Complexe getallen en haakjes uitwerken
De lezingen van Jan van de Craats en Jan Wiegerinck sloten heel mooi op elkaar aan. Jan van de Craats kwam eerst aan bod. Hij liet zien dat 'complexe getallen' een geschikt keuzeonderwerp kan zijn voor wiskunde D, en maakte tussendoor meteen even reclame voor een syllabus over dit onderwerp op zijn eigen website. Jan liet nog eens de bekende maar niet zo voor de hand liggende definitie zien voor de vermenigvuldiging van complexe getallen:
$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$
met als leuk gevolg dat
$i^2 = (0 + 1 \cdot i)(0 + 1 \cdot i) = -1 + 0 \cdot i = -1$.
Jan kon het niet laten om bij dit voorbeeld even te zeggen dat het gewoon een kwestie is van haakjes uitwerken. 'Ik hoop dat ze dat tegenwoordig nog kunnen.' Dit leverde natuurlijk het nodige gelach op. Vervolgens kwam hij op stoom en nam het publiek snel door alle bekende basisprincipes heen om te eindigen bij de differentieerbaarheid van complexe functies. De tijd vloog om, mede doordat Jan de zaal er goed bij betrok.

Complexe dynamica
Tot slot wil ik iets vertellen over de presentatie van Jan Wiegerinck. Deze begon met plaatjes van de Mandelbrot- en de Julia-verzamelingen. Het gebruik van een computer is onmisbaar bij zo'n presentatie. Wiegerinck zoomde in op een enkel punt van de Mandelbrot-verzameling; de computer ging vervolgens aan het werk om het nieuwe beeld te kunnen produceren. Een mooi voorbeeld van itereren oftewel het herhaald uitvoeren van een complex differentieerbare functie of afbeelding. In de syllabus wordt aangegeven dat het eerste gedeelte iets leuks voor wiskunde D kan opleveren. Het tweede gedeelte in de syllabus is voor leerlingen te moeilijk maar zal een verrijking voor docenten zijn.

Felicitatie
Al met al sloten de lezingen van met name de vrijdag dus mooi op elkaar aan. Een felicitatie waard aan de organisatie! Ik hoop dat er volgend jaar, in 2008, ook weer zo'n mooi programma ligt, met opnieuw een goede syllabus die onmisbaar is om les-ideeën op te doen.

Noot
Samenvattingen van de lezingen zijn te vinden op *www.cwi.nl/events/2007/VC2007/* op de CWI-website.
De bijbehorende syllabus kan via die site worden besteld (*www.cwi.nl/publications/cwi_syllabi.html*).

Over de auteur
Gert de Kleuver is afdelingsleider aan het Ichthus College te Veenendaal en redactie-voorzitter van *Euclides*.
E-mailadres: *g.de.kleuver@gmail.com*

Boekbespreking / Speeltuin van de wiskunde

[Chris van der Heijden]

Ondertitel: Opties, kansspelen, Escher, pi, Fermat en meer
Redactie: Bart de Smit, Jaap Top
Uitgeverij: Veen Magazines / Natuur Wetenschap en Techniek (2003)
ISBN 90 76988 20 X
Prijs: € 19,95

Wiskunde heeft helaas nog vaak het odium een wetenschap voor ingewijden te zijn. Een wetenschap van alleen maar getallen en formules. Dit oordeel, of vooroordeel, is moeilijk te doorbreken. Veel dikke boeken, de wiskunde populariserend, proberen het. Het is echter de vraag of met veel woorden en het vermijden van formules en de voor de wiskunde zo kenmerkende notatiewijze een beter inzicht in de wiskunde verkregen wordt. Het boekje *Speeltuin van de wiskunde* probeert de wiskunde nader te brengen tot een breder publiek zonder hieraan concessies te doen. De schrijvers doen dit echter wel op didactisch verantwoorde wijze, met goed gekozen onderwerpen en voorbeelden die ook niet-wiskundigen zeker kunnen aanspreken. Dat zij hierin geslaagd zijn blijkt hieruit dat van het hier besproken boekje al de vijfde druk verschenen is. Het boekje is een bundeling van 10 hoofdstukken geschreven door 12 wiskundigen van naam. De moeilijkheidsgraad van de hoofdstukken varieert; soms leest een hoofdstuk gemakkelijk weg, maar soms vergt het begrijpen van een hoofdstuk doorzettingsvermogen. Een vwo-opleiding als ingangsniveau is dan ook zeker niet te veel gevraagd. Maar wie de moeite neemt en dit boekje doorwerkt, weet dan ook dat wiskunde geen statisch vak is, maar een vak dat zich ontwikkelt door nieuwe inzichten en actuele toepassingen op vele terreinen. Ook de geschiedenis van de wiskunde en de wiskundigen wordt aangestipt.
Recensent heeft vooral gekeken naar de bruikbaarheid van dit boekje voor docenten en leerlingen in het studiehuis van het vwo: in hoeverre zijn de in dit boekje besproken onderwerpen bruikbaar voor verdieping en verbreding of geschikt als keuzeonderwerp. Hierbij is vooral gedacht aan het nieuw in te voeren vak wiskunde D.

Hoofdstuk I is bruikbaar binnen het domein *Meetkunde*. In dit hoofdstuk behandelt emeritus-hoogleraar prof. F. van der Blij in een duidelijk betoog de bolmeetkunde als voortzetting van de vlakke meetkunde. Zoals we de grootte van een hoek in het platte vak kunnen definiëren als de lengte van een cirkelboog op de eenheidscirkel die het hoekpunt als middelpunt heeft, zo kunnen we de grootte van een ruimtehoek definiëren als de oppervlakte van een boldriehoek op de eenheidsbol die ook het hoekpunt als middelpunt heeft. De hoekensom van een viervlak blijkt dan alle waarden tussen 0 en 2π te kunnen aannemen. Maken we de straal van een bol steeds groter, dan gaan de sinusregel en de cosinusregel van een boldriehoek in het limietgeval over in de bekende regels van de vlakke meetkunde. We zien dat analogie een sterk begrip is in de wiskunde, ook vanuit didactisch gezichtspunt.

In **hoofdstuk II** vertelt Bart de Smit over het 'centrale gat' in een van de prenten van de graficus M.C. Escher. De getaltheoreticus prof. H. Lenstra heeft begin 2000 de wiskundige structuur achter Eschers litho blootgelegd. In een drie jaar lopend project aan de Universiteit Leiden is een reconstructie van de prent gemaakt, waarin het gat is opgevuld. Het betreft een structuur die berust op een elliptische kromme over het lichaam van de complexe getallen. Dit hoofdstuk bevat veel plaatjes, maar graaft verder niet diep. Dit is waarschijnlijk ook niet mogelijk binnen het korte bestek van enkele bladzijden.

De hoofdstukken III en V lenen zich goed voor gebruik in de domeinen *Dynamische modellen* en *Statistiek en kansrekening.*
In **hoofdstuk III** geeft prof. Herold Dehling een elementaire inleiding in de theorie van de Black-Scholes-Merton formule. De Amerikaanse hoogleraren Robert C. Merton en Myron S. Scholes hebben in 1997 de Nobelprijs voor Economie gekregen voor hun baanbrekend werk op het gebied van de waardering van opties. Opties zijn momenteel in het nieuws, omdat zij een rol spelen bij de beloning van president-directeuren van banken of bedrijven wanneer deze fuseren met

een buitenlandse bank of bedrijf. Een vooruitziende blik legt hun dan geen windeieren. Mensen zonder vooruitziende blik kunnen echter gebruik maken van genoemde statistische formule die de momentane waarde aangeeft van een Europese call optie.
Dit hoofdstuk laat een prachtig staaltje zien van wiskundige modelvorming in de economie. Via de uitleg over het één-periode-model met een getallenvoorbeeld, algemene binaire boommodellen, het Cox-Ross-Rubinstein binomiaal model, de Black-Scholes partiële differentiaalvergelijking en continue limieten van binomiale bomen krijgen we inzicht in genoemde formule. Dit lijkt te hoog gegrepen voor leerlingen in het vwo, maar het één-periode-model geeft al de essentie van de theorie van de optieprijzen.
Hoofdstuk V is speelser van karakter. Prof. Ben van der Genugten behandelt twee kansspelen: Roulette en Mens-erger-je-niet. Duidelijk wordt dat een regelmatige bezoeker van een casino gemiddeld genomen armer wordt, welke strategie hij ook kiest. Uitdagend is de vraag naar de zeer kleine kans dat een speler de bank ruïneert en wat het te verwachten aantal spelrondes daarbij is. Gebruikmakend van het begrip voorwaardelijke kans worden hiervoor de formules gegeven, maar niet afgeleid. Een aardige opdracht voor leerlingen, maar dat vereist wel enige algebraïsche rekenvaardigheid.

Bij het schrijven en lezen van cd's en harde schijven vindt informatieoverdracht plaats in 'woorden'. Het is steeds weer een wonder dat er geen fouten optreden. Dit is slechts schijn. In werkelijkheid worden de 'woorden' verlengd, zodat bij een af te spreken maximaal toegestaan aantal fout overgedragen 'letters' het oorspronkelijke 'woord' voldoende te onderscheiden is van andere 'woorden' en dus terugvertaald kan worden. Het op de wiskunde gebaseerde gereedschap is de coderingstheorie. Getaltheorie en de theorie van eindige lichamen spelen hierbij een rol. Prof. Iwan Duursma en Ludo Tolhuizen behandelen in **hoofdstuk IV** de Reed-Solomon codes, lineaire blokcodes en een algoritme voor foutencorrectie.

Gerton Lunter en Bruno van Wayenburg bespreken in **hoofdstuk VI** onder de titel 'Het idee van Fourier' enige theoretische en toegepaste aspecten van de Fourieranalyse. De Fourierreeksen van twee periodieke functies met periode 2π worden afgeleid: de blokgolf en de functie $f(x) = |x|$ op $[-\pi, \pi\rangle$. Ook de reeksen voor π en π^2 en de reeks van Euler worden afgeleid. Als technische toepassing worden twee RC-filters behandeld, een hi-pass en een low-pass filter. Aan de orde komen transmissieformules, transmissiediagrammen en het spectrum van gefilterde blokgolven. Ook de spectra van muziekinstrumenten krijgen aandacht. Kortom: een rijk scala aan onderwerpen voor een keuzeonderwerp.

De overige hoofdstukken gaan soms heel diep. De daarin gegeven inleidende voorbeelden kunnen echter heel goed dienen als uitgangspunt voor een onderzoeksopdracht aan vwo-leerlingen.

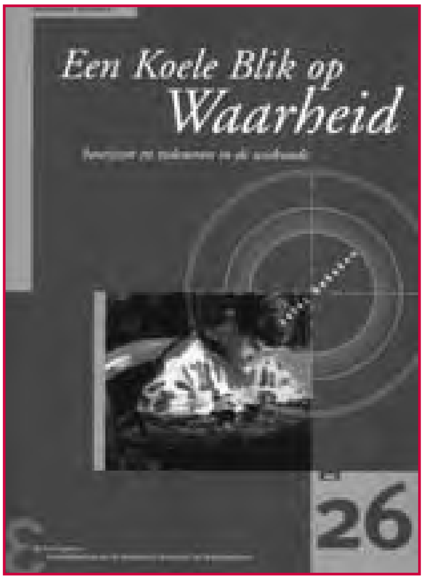
Het bewijs van het vermoeden van Fermat door Andrew Wiles spreekt tot de verbeelding. Zowel hoofdstuk VII als hoofdstuk VIII vormt een inleiding op dit bewijs; deze hoofdstukken overlappen elkaar dan ook gedeeltelijk. De vergelijking van Fermat voor exponent $n = 2$ is de bekende stelling van Pythagoras.
Prof. Peter Stevenhagen laat in **hoofdstuk VII** zien dat voor de oplossing meetkunde en getaltheorie sterk verweven zijn (unificatie binnen de wiskunde). Een getaltheoretisch probleem kan teruggebracht worden tot een meetkundig probleem. Aan de hand van een rationale parametrisatie van de eenheidscirkel wordt bewezen hoe men een Pythagoreïsch tripel vindt, maar ook hoe het anders kan door gebruik te maken van complexe gehele getallen (Gauss). Het vermoeden van Fermat wordt bewezen voor exponent $n = 4$.
De vergelijking van Fermat is een voorbeeld van een diophantische vergelijking. Bij vaste gehele exponent zoeken we naar gehele getallen a, b, c die voldoen aan de vergelijking $a^n + b^n = c^n$. Men kan zich afvragen hoe men in het algemeen diophantische vergelijkingen oplost. In **hoofdstuk VIII** geeft prof. Don Zagier in een paar voorbeelden een oplossingsmethode voor een tweede- en derdegraadsvergelijking in 2 variabelen en de daarbij behorende meetkundige interpretatie.

Over het fascinerende getal π is al heel veel geschreven, en nu ook in dit boekje. De hoofdstukken IX en X gaan er beide over. Prof. Jaap Top geeft in **hoofdstuk IX** een recurrente betrekking van de Canadees J.M. Borwein waarmee men in 4 stappen het getal π al tot op 10 decimalen nauwkeurig kan berekenen. Interessant is het numerieke probleem hoe men met de arctan-integraal en een veelterm met rationale coëfficiënten het getal π in gewenste nauwkeurigheid rationaal kan benaderen. Een computer kan immers in principe alleen maar met eindige getallen rekenen.
Dit hoofdstuk omvat ook een bewijs van de irrationaliteit van π. En wie een ezelsbrug nodig heeft om de decimalen van π te onthouden, die kan terecht bij enkele gedichten en stukjes proza, onder meer van drs. P.
Hoofdstuk X bevat de lezing van prof. Henk J.M. Bos, uitgesproken op 5 juli 2000 in de Pieterskerk in Leiden bij de onthulling van de gedenksteen voor Ludolph van Ceulen. De titel was: 'De cirkel gedeeld, de omtrek becijferd en pi gebeiteld: Ludolph van Ceulen en de uitdaging van de wiskunde.'

De hoofdstukken worden afgesloten met literatuurverwijzingen en/of internetadressen en soms ook nog opdrachten, zodat zowel een geïnteresseerde leek als een vwo-leerling zich verder kan verdiepen in een onderwerp. Dit boekje mag dan ook niet ontbreken in de schoolbibliotheek.

Over de recensent
Chris van der Heijden was van 1969 tot 2001 wiskundedocent en later ook schoolleider aan de scholengemeenschap CSG Blaise Pascal in Spijkenisse.
E-mailadres: *chris-van-der-heijden@wxs.nl*

VERSCHENEN / Een Koele Blik op Waarheid (Zebra 26)



Ondertitel: Bewijzen en redeneren in de wiskunde
Auteur: Ferdinand Verhulst
Uitgever: Epsilon Uitgaven, Utrecht (2007)
ISBN 978 90 5041 100 4
Prijs: € 9,00 (64 pagina's)
Prijs voor NVvW-leden: € 7,00 (op bijeenkomsten)

Flaptekst - Over 'wat waar is' kun je flink van mening verschillen. In de wiskunde kun je van alles berekenen en ook vermoedens hebben over het waar zijn van allerlei beweringen. Deze zebra houdt zich bezig met de vraag wat een bewijs is en welke dingen bewijsbaar zijn.
Daarvoor zijn er verschillende methoden die worden opgesomd, maar vaak is een tamelijk onverwachte gedachtengang effectief.
Dit laten we zien aan de hand van een groot aantal voorbeelden uit de getaltheorie en de vlakke meetkunde.

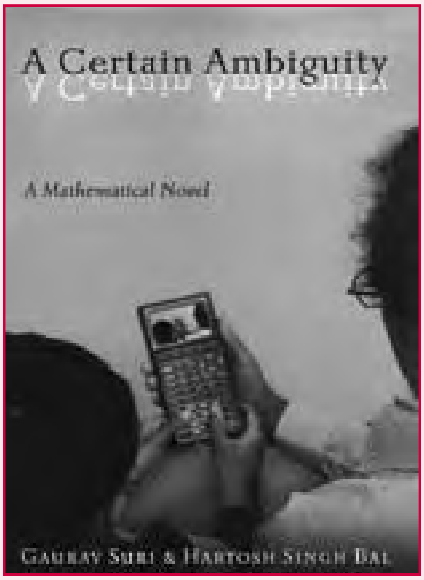
De Zebra-reeks wordt uitgegeven in samenwerking met de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Zie ook: *www.epsilon-uitgaven.nl*

VERSCHENEN / Wisc-wandeling

Ondertitel: Een wiskundepuzzeltocht door Utrecht
Auteur: Hans Wisbrun
Uitgever: Wisc / Hans Wisbrun (2007)
ISBN 978-90-75708-02-8
Prijs: € 5,00 (13 pagina's), met een minimale afname van twee exemplaren te bestellen via wisc@planet.nl

Flaptekst – Architectuurwandelingen, die zijn bekend. Natuurwandelingen, ook die bestaan. Maar een *wiskundewandeling*, wat zou dat zijn?
Dit is de beschrijving van zo'n wandeling, door Utrecht. […] Aan de omgeving worden telkens prikkels ontleend om wiskundevragen te stellen. Het gaat hierbij om betrekkelijk eenvoudige wiskunde, zodat iedereen met enige basiskennis wiskunde (twee à drie jaar voortgezet onderwijs) de meeste vragen zal kunnen beantwoorden.

Verschenen /
A Certain Ambiguity

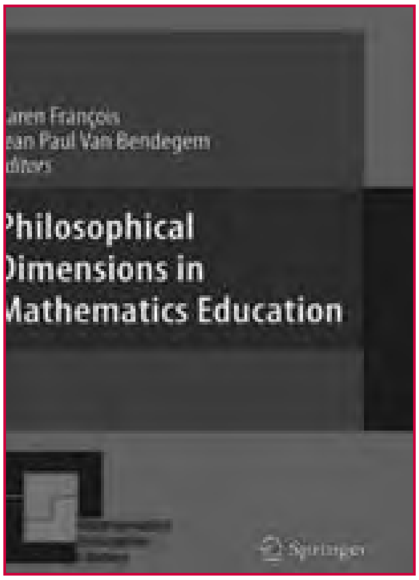


Ondertitel: A Mathematical Novel
Auteurs: G. Suri, H. Singh Bal
Uitgever: Princeton University Press, Princeton, USA (2007)
ISBN 9 780691 127095
Prijs: € 28,95 (281 pagina's)

Uit de flaptekst - Martin Gardner: "A Certain Ambiguity is an amazing narrative that glows with a vivid sense of the beauty and wonder of mathematics. The narrator is deeply troubled by the ancient question of whether the objects and theorems of mathematics have a reality independent of human minds. Mixing fiction with nonfiction, A Certain Ambiguity is a veritable history of mathematics disguised as a novel. Starting with the Pythagorean theorem, it moves through number theory and geometry to Cantor's alephs, non-Euclidean geometry, Gödel, and even relativity."
Eli Maor: "This is a truly captivating thriller that will take you on a whirlwind tour to infinity - and beyond. But be warned: once you start reading, you won't be able to put it aside until finished! A masterly told story that weaves together criminal law, ancient and modern history, a young man's quest to know his deceased grandfather – and some highly intriguing mathematics."

Voor een recensie door Ionica Smeets, zie: *www.delta.tudelft.nl/archief/j39/n30/22454*

Verschenen /
Philosophical Dimensions in Mathematics Education



Red.: Karen François, Jean Paul Van Bendegem
Uitgebracht als vol. 42 in de serie 'Mathematics Education Library' onder redactie van Alan J. Bishop
Uitgever: Springer (2007)
ISBN 978-0-387-71571-1
Prijs: € 69,95 (ca. 240 pagina's)

In de tien hoofdstukken van dit boek worden recente ideeën met betrekking tot zowel filosofie *over* als *in* het wiskunde-onderwijs beschreven, met rechtstreeks bruikbare voorbeelden voor de leraren-opleiding en de dagelijkse lespraktijk.
De uitgave is bestemd voor didactici, onderwijsonderzoekers, lerarenopleiders, (wetenschaps)filosofen, leraren en andere geïnteresseerden in het wiskundeonderwijs.

Boekbespreking / Gecijferdheid in beeld

[Joke Verbeek]

Bijna was het te bespreken boekje aan de kant gelegd door de recensent: te weinig tekst, geen inhoud, er valt niets over te melden, was de gedachte. Maar dat pakte anders uit…

Het Jonge Vadersboek

Mijn boekenkast bevat al een dertigtal jaren 'Het Jonge Vadersboek', ooit geschreven door Nico Scheepmaker. Het is een dun pocketboekje, bloemetjes op de kaft, kleine lettertjes, eenvoudige schetsjes, beetje geel papier. Het ruikt muf. Eerlijk is eerlijk: dat gelige en muffe zijn niet de oorspronkelijke eigenschappen van het boekje, maar wel eigenschappen die zich er in de loop der jaren aan hebben toegevoegd zonder dat ze misstaan. Ongetwijfeld is het destijds door mij aangeschaft om meer inhoud te geven aan het vadergehalte van mijn echtgenoot, een poging die -zo begrijp ik nu, niet toen- gedoemd was te mislukken. Vaderschap laat zich niet aansturen, zeker niet door een boekje, maar het was desondanks een poging waard. Aan het boekje zelf heeft het zeker niet gelegen: het bevat een kleine 150 pagina's met vaardigheden waarmee een jonge vader zoal zijn voordeel kan doen. Heeft u nog geen idee van de inhoud? Denk dan aan spelletjes als 'kamertje verhuren' en 'watje blazen', aan trucs als 'ei in de fles' en 'een kop en schotel maken van een touw', maar ook aan vliegtuigjes vouwen, flauwe moppen tappen en prikkeldraad maken op onderarmen, allemaal 'onnutte trivialiteiten' (citaat) waar de gemiddelde jonge vader niet zo maar uit zichzelf over beschikte in de jaren zeventig, en u heeft een aardig beeld.

Gecijferdheid in beeld

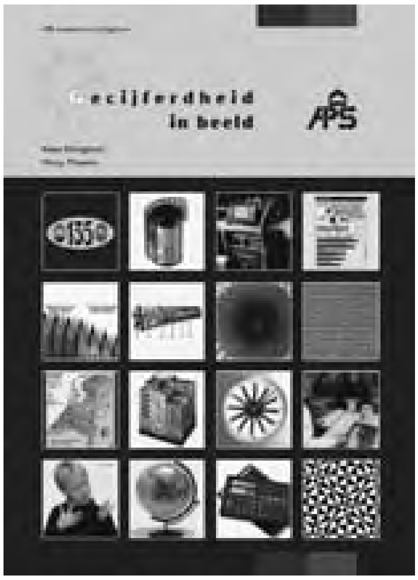
Op mijn bureau ligt al wekenlang het door Marja Meeder en Kees Hoogland geschreven glanzend blauwe boekje over gecijferdheid. Nou ja, geschreven: samengesteld is een betere omschrijving. De titel is raak gekozen; het boekje bestaat uit veel beeldmateriaal dat een indruk geeft van de rol die getallen in ons leven spelen. Een keur aan beelden van allerlei aard: kalenders, tijdschema's van de spoorwegen, kledingmaten, telefoonnummers, wiskunde-examens, metroplattegronden, productinformatie, rekentuig en wat al dies meer zij is terug te vinden in deze uitgave. Nou ja, terugvinden…
Een overeenkomst tussen Het Jonge Vadersboek en dit boekje is het ontbreken van een inhoudsopgave. Daardoor is het aanvankelijk lastig greep te krijgen op de inhoud.

Kees Hoogland

Gelukkig bericht het boekje zelf over het waarom van de uitgave: het helpt de lezer op weg om zich een beeld te vormen van gecijferdheid. En de schrijvers hopen een inhoudelijke en beeldende impuls te geven aan de discussie die wordt gevoerd over de rol van gecijferdheid in het onderwijs in Nederland.
Daarmee past het prima in de reeks activiteiten van Kees Hoogland waarmee hij probeert gecijferdheid of het ontbreken ervan onder de aandacht te brengen. Met zijn artikelen en website [1] over dit onderwerp probeert hij in ieder geval te bewerkstelligen dat we met het woord 'gecijferdheid' allemaal hetzelfde bedoelen. Ook neemt hij stelling tegen de soms de kop opstekende opinie waarin de vaardigheid 'cijferen' wordt verward met 'gecijferdheid'. Hij noemt het cijferen het topje van de ijsberg, het zichtbare deel van de gecijferdheid. En net als bij een ijsberg is het grootste deel onzichtbaar maar wel belangrijk. In dat onzichtbare deel zitten bijvoorbeeld getalbegrip en het verbindingen kunnen leggen, kortom, het is het wiskundig denkvermogen. Daarin moet in het onderwijs worden geïnvesteerd.
Met zijn mening en gedrevenheid om het onderwerp op ieders agenda te krijgen is Hoogland op weg de Nederlandse John Allen Paulos te worden [2].

Gecijferdheid

Gecijferdheid wordt door Hoogland en Meeder omschreven als 'het vermogen van de individu om zich zelfstandig en adequaat te redden in situaties waarin getallen, patronen en structuren een rol spelen.' Een heel wat breder kader dan optellen,

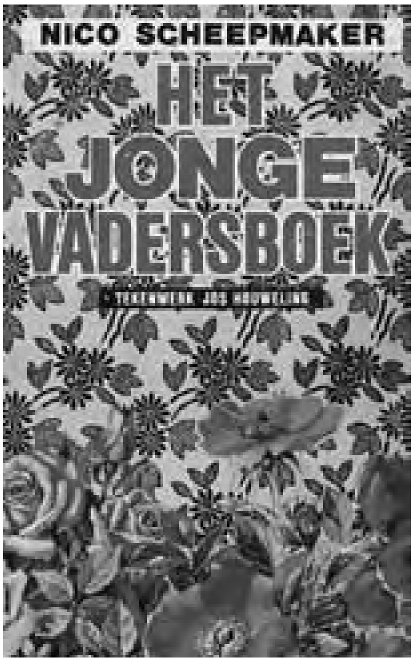


Auteurs: Kees Hoogland, Marja Meeder
Uitgever: APS, Utrecht 2007
ISBN 90-6607-381-0
Prijs: € 9,90 excl. verzendkosten (66 pagina's)
Te bestellen via www.aps.nl, bestelnr. 100.249

aftrekken, delen en vermenigvuldigen dus. Ze stellen bovendien dat zelfs mensen die goed zijn in cijferen of wiskunde, ongecijferd kunnen zijn, en wie hun boekje leest, kan zich daar iets bij voorstellen. Het boekje staat vol met wetenswaardigheden waarbij getallen een rol spelen maar waar de gemiddelde mens niet zo maar weet van heeft. Zo was ik bijvoorbeeld verbaasd te lezen dat alle wereldbewoners bij elkaar niet eens onze provincies Gelderland en Overijssel vullen als iedere persoon 1 m^2 ruimte krijgt om te staan. Wist u dat? Ik krijg, als ik zoiets lees, onmiddellijk de neiging te denken dat de hele wereldbevolking dus makkelijk kan worden gehuisvest in een ruimteschip van die omvang, als wordt gezorgd voor meerdere etages. Nuttig voor als… Mijn fantasie slaat op hol bij het lezen van zo'n feitje, en dat is wat Hoogland en Meeder proberen te bereiken: ik word me bewust van een fenomeen in mijn leefwereld waarin getallen een rol spelen.

En verder

Hoe meer ik door het boekje blader, hoe meer tekst ik ontdek. Al grazend over de bladzijden lees ik dat schoolboeken voor gecijferdheid volgens de auteurs niet het geschikte middel zijn om leerlingen te leren vragen te stellen en antwoorden te vinden over de echte kwantitatieve wereld. Dat kinderen actief op onderzoek moeten uitgaan, maar ook in dialoog moeten gaan met medeleerlingen of de docent. Hoe het precies zou moeten blijft vooralsnog onduidelijk, want volgens de schrijvers weten we nog te weinig van hoe de mens leert, dus daarvoor is meer onderzoek nodig.
Ik lees dat innovatief onderwijs op zowel basisscholen als in het voortgezet onderwijs zich buigt over de vraag hoe wiskunde en gecijferdheid een plaats kunnen krijgen in lessen of projecten.
Ik lees dat ook in het buitenland wordt nagedacht over dit onderwerp.
En ik onderschrijf de mening van de auteurs over het belang van het aanbrengen van gecijferdheid bij leerlingen. Hoe kunnen zij zich straks anders handhaven in een wereld vol van leningen, hypotheken, loterijen, diagrammen en statistieken? Vooral ook bij de zwakkere leerlingen is gecijferdheid onderdeel van hun zelfredzaamheid.



Jonge vaders en docenten

Net als 'Het Jonge Vadersboek' kan 'Gecijferdheid in beeld' wel eens een veelgekozen boek worden in mijn boekenkast. Als ik aanvankelijk al dacht dat er niet veel nuttigs instond, dan heb ik dat idee nu laten varen. Juist omdat het -net als Het Jonge Vadersboek- geen inhoudsopgave bevat, word ik verplicht elke keer als ik iets wil opzoeken het hele boekje door te bladeren, zodat elke keer alle items weer langskomen. Zo ontstaat een totaalbeeld dat in het geheugen blijft hangen.
Net zoals Het Jonge Vadersboek door mij werd geraadpleegd als ik iets wilde weten over onderwerpen als 'fluiten op een schelp' of 'pingpongballetje uitdeuken', zo stel ik me voor dat ik als wiskundedocent regelmatig zal grijpen naar 'Gecijferdheid in beeld' als ik voor mijn lessen op zoek ben naar praktijkvoorbeelden of naar een geschikt onderwerp voor een project waarbij de kwantitatieve kant van de wereld om ons heen een rol speelt. Niet omdat er kant en klare uitwerkingen of ideeën in staan, maar juist doordat die er *niet* in staan krijg je inspiratie. Een aanrader dus voor iedereen die zich beroepshalve met gecijferdheid bezighoudt, en dat zouden wij wiskundedocenten toch allemaal moeten doen!
Dat mijn spellingscontrole het woord gecijferdheid niet kent en het dus elke keer voorziet van een rood golfje, is voor mij een bewijs dat er nog veel werk aan de winkel is op dit gebied.

Noten

[1] *www.gecijferdheid.nl*
[2] Paulos schreef o.m. *Ongecijferdheid* (1988) en *De gecijferde mens* (1991), uitgegeven bij Bert Bakker.

Over de recensent

Joke Verbeek is redacteur van Euclides, en docent wiskunde op het Arentheem College in Arnhem.
E-mailadres: *jokeverbeek@chello.nl*

Jaarrede 2007

[Marian Kollenveld]

Deze jaarrede werd uitgesproken door NVvW-voorzitter Marian Kollenveld op de jaarvergadering van 10 november 2007 te Nieuwegein.

Dames en Heren,

De afgelopen jaren heb ik in de jaarrede steeds uitvoerig stilgestaan bij de visie en de voornemens van het bestuur; we hadden veel plannen, dus ik was lang aan het woord. Dit jaar willen we u vertellen hoe ver we daarmee gekomen zijn, dus ik zeg minder maar mijn medebestuursleden meer.

Dit bestuur heeft vanaf het begin de blik bewust naar buiten gericht, en ingezet op het verbeteren van de positie van de leraar in de ontwikkelingen van het wiskundeonderwijs. Het kernthema was: geef de leraar zijn vak terug. We hadden wat slechte ervaringen opgedaan, met onder meer de basisvorming waar we volstrekt buiten stonden, en wilden graag dat de wiskundeleraar, georganiseerd in de NVvW, op natuurlijke wijze betrokken zou gaan worden bij vernieuwingen, simpelweg omdat dat een beter resultaat oplevert dan top-down-invoering, al dan niet met vruchteloos protest van leraren.

Ik mocht onlangs spreken met de Parlementaire Commissie Dijsselbloem die de mislukking van recente onderwijsvernieuwingen onderzoekt, en die notie is daar inmiddels gelukkig ook aanwezig, en ook de commissie Rinnooy Kan bepleit een sterkere positie van de leraar. Al garandeert dat natuurlijk nog niets, die geluiden horen we al heel lang. Daar moet nog wel veel concreet werk worden verzet, en onze invloed is beperkt.

Programma's havo/vwo

Binnen de wiskunde in het vo gaat het beter. Voor havo/vwo hebben we bij de herziening 2007 (de PEP-operatie) zoals u weet zelf het initiatief genomen voor de programmavoorstellen. Die zijn grotendeels overgenomen, zij het op het allerlaatst door de politiek toch weer een beetje veranderd.
In alle PEP-syllabuscommissies waren twee of drie leraren aanwezig. In de vernieuwingscommissie voor wiskunde CTWO vanaf 2011 zitten drie leraren (en veel oud-leraren), in elke programmacommissie die de onderwerpen vaststelde zaten twee of drie leraren, en in de syllabuscommissies die voor de uitwerking in eindtermen zorg dragen komen ook weer twee of drie leraren per commissie.

Deze grote betrokkenheid van leraren lijkt in onze kring inmiddels vanzelfsprekend, maar er is een groot verschil met sommige zusterorganisaties, die beleefd moeten vragen om door de vernieuwingscommissie überhaupt geïnformeerd te worden.
Die betrokkenheid kan niet alleen komen van de leden van de commissies. Die doen allemaal vreselijk hun best, maar het kan niet zonder u, de leraar die het uiteindelijk in de klas moet gaan doen. De veldraadplegingen en het forum zijn matig bezocht, maar er liggen bij de diverse programma's voor 2011 toch nog wel wat vragen over haalbaarheid en niveau, waar uw mening van belang is. En ook bij het experimenteren met de nieuwe programma's is uw medewerking hard nodig om tot een goed resultaat te komen. Ik roep u daarom dringend op om straks even langs te gaan bij het tafeltje van Sieb Kemme en zijn jongens. (Er staat een foto in het programmaboekje.) Daar ligt een overzicht met verschillen tussen de 2007- en 2011-programma's met wat vragen, daar kunt u zich informeren en aanmelden voor de experimenten.

Nomenclatuurrapport

Traditiegetrouw heeft de vereniging ook het initiatief genomen tot het instellen van een nomenclatuurcommissie bij de programma's 2007. Na uiterst levendige discussies in de commissie ligt er nu een nomenclatuurrapport dat breed gedragen wordt. Het staat op de site, is hier voor u gratis verkrijgbaar. We hebben het inmiddels aangeboden aan de CEVO.

Uitstaptoetsen

De werkgroep havo/vwo heeft op verzoek van het bestuur een bijdrage geleverd aan de verkleining van de kloof tussen voortgezet en hoger onderwijs door te komen met uitstaptoetsen en daarmee het gesprek aan te gaan met het vervolgonderwijs. Een historische gebeurtenis misschien, omdat we vinden dat je wel aan weerszijden van die kloof kunt blijven roepen hoe slecht het allemaal is, maar beter kunt proberen om er wat aan te doen.

Professionalisering

Een sterke positie van de leraren kan niet zonder professionalisering.
- Dat betekent professionalisering van de vereniging zelf als organisatie. Onze ambities kunnen we niet voldoende waarmaken met alleen vrijwilligers in eigen tijd. Die tijd wordt steeds schaarser. We hebben domweg geld nodig om tijd voor mensen te kopen. Voor een deel kan dat uit de contributie, maar daar zit een eind aan. Vorig jaar hebben we u voorgesteld, na een jarenlange vergeefse rondgang bij schoolleiders, ministerie en vakbonden om faciliteiten te vragen voor ons werk, aansluiting te zoeken bij een koepelorganisatie, de CMHF. U heeft dat toen met een overgrote meerderheid aangenomen.
De uitwerking daarvan in de statuten komt straks ter sprake. Daardoor hebben we nu wel een gelijkwaardige positie, kunnen we voor mensen die zich ergens voor inzetten wat meer tijd kopen, is voor u de contributie aftrekbaar, en hebben we voldoende geld gekregen om voor u de individuele rechtspositionele hulp te kunnen betalen, zodat die voor u gratis is. Dat dit gratis is, is voor de goede verstaander ook een signaal.
Mocht het rapport van Rinnooy Kan over de positie van de leraar nog gevolgen hebben voor de positie van vakinhoudelijke verenigingen dan kan het zijn dat we weer bij u terug komen om hierover te praten.
- Professionalisering betekent natuurlijk ook professionalisering van de leraar zelf. Ons professionaliseringsplan (waarover we het al jaren hebben) is dit jaar van start gegaan; Marianne Lambriex zal u daarover straks meer vertellen.

Bestuur
Op het terrein van het scheppen van voorwaarden voor een sterke vereniging en van professionele docenten heeft de gestage arbeid dus wel enig resultaat geboekt. We nemen initiatieven, doen mee met de ontwikkelingen en staan niet morrend aan de zijlijn, we hebben wat meer financiële armslag en we hebben binnenkort een eigen professioneel kwaliteitskader.

Resultaten komen pas na een aantal jaren en u kunt wel uitrekenen dat velen in het bestuur aan de laatste termijn bezig zijn, of zelfs in blessuretijd actief. We hebben dus ernstig en acute behoefte aan opvolgers. Wim Kuipers zal daarover straks nog iets zeggen.

Binnenkort heeft het bestuur weer een bezinningsweekend, waarin we vooruitkijken.
We denken in de volgende fase ons weer meer intern te kunnen richten op de vereniging en de inhoud van ons werk, het wiskundeonderwijs. Als de ervaren eerstegraders met pensioen gaan verwachten we dat er meer behoefte zal gaan ontstaan aan de rol van de vereniging als de ervaren collega, de steun in de rug. Dat is ook een mooie manier om de kennis van al die frisse pensionado's te behouden en door te geven. Het zoeken is naar een manier waarop dat kan. Andere thema's zijn didactiek, met praktische tips voor in de klas, pr en ledenwerving, en rol en taak van de vereniging bij nog komende vernieuwingen. Voelt u zich door deze thema's aangesproken en denkt u een bijdrage te willen/kunnen leveren, aarzel niet en meldt u. We hebben u nodig.

Laat ik eindigen met al die mensen die het afgelopen jaar voor de vereniging actief zijn geweest heel hartelijk te danken; we hadden u erg nodig en hopen de komende tijd weer van uw diensten gebruik te kunnen maken, want een vereniging, dat ben je met elkaar. Dank u wel.

Advisering rechtspositie

[Pim van Bemmel, namens het NVvW-bestuur]

Het lidmaatschap van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren bij de Federatie Onderwijsbonden CMHF/MHP is per 1 augustus 2007 van start gegaan. Hiermee heeft de vereniging ook de verplichting op zich genomen om een helpdesk voor rechtspositionele problemen en advisering in arbeidszaken van de individuele leden in te stellen.
Het spreekt voor zich dat met betrekking tot deze materie binnen de vereniging niet de benodigde deskundigheid aanwezig is. Teneinde op het gebied van rechtspositionele problemen en advisering in arbeidszaken de leden van onafhankelijk en deskundig advies te voorzien is het bestuur van de vereniging een overeenkomst aangegaan met *Rechtspositie-Adviesbureau Evers* te Culemborg. Dit bureau is reeds vele jaren actief op dit gebied voor meerdere onderwijsvakverenigingen. De leden van de NVvW kunnen vanaf 1 november 2007 gratis gebruik maken van de helpdesk van dit bureau onder de navolgende voorwaarden:

- De contributie over het verenigingsjaar 2007-2008 dient te zijn voldaan.
- De helpdesk is uitsluitend bestemd voor adviezen en hulp voor rechtspositionele problemen uit hoofde van de dienstbetrekking c.q. arbeidszaken.
- Alleen problemen ontstaan na 1 november 2007 komen voor behandeling in aanmerking. Lopende problemen worden niet overgenomen.
- De problemen dienen onderworpen te zijn aan de Nederlandse wet en regelgeving.

Gegevens helpdesk:
NVvW – Rechtspositie-Adviesbureau
Postbus 405
4100 AK Culemborg
telefoon: 0345-531324
Het bestuur is van mening hiermee een passende invulling te hebben gegeven aan een van de voorwaarden van toetreding tot de Federatie Onderwijsbonden CMHF/MHP.

Nieuws van het Wereldwiskunde Fonds

[Juliette Feitsma]

Voor degenen die het nog niet weten: het WwF is een werkgroep binnen de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het WwF geeft financiële ondersteuning aan wiskundeprojecten in de Derde Wereld.
Het WwF heeft op zaterdag 10 november j.l. met een stand op de jaarvergadering gestaan. Na een oproep van Wim Kuipers hebben verschillende mensen gereageerd met ideeën voor nieuwe projecten. We hebben op die dag zo'n 100 boeken verkocht, de opbrengst gaat volledig naar projecten.
In december gaat de internetboekenveiling weer open, zie *www.wiskundeveiling.nl*.
Dit jaar steunen we o.a. een school in Brokopondo in Suriname; een artikel daarover verschijnt waarschijnlijk in het maartnummer van *Euclides*.
De werkgroep kan goed nieuwe leden gebruiken; op het moment zijn we met zijn vijven. Het lidmaatschap houdt in: een paar keer per jaar vergaderen en daarnaast wat e-mailcontacten.
Dankzij de bijdrage van veel leden en de boekenveiling hebben we flink wat geld in kas; aanvragen voor nieuwe projecten zijn welkom.
Informatie bij de secretaris van de werkgroep, Wim Kuipers (e-mail: *w.kuipers@nvvw.nl*).

TI-nspire™ TECHNOLOGIE
Een nieuwe visie vanuit meerdere wiskundige invalshoeken
Elke leerling leert op een andere manier.
De een begrijpt vergelijkingen vlot, de ander grafieken. De nieuwe TI-Nspire™ technologie voor Wiskunde en Exact is geschikt voor verschillende individuele manieren van leren. Lesmateriaal wordt gepresenteerd en onderzocht naar de voorkeur van de individuele leerling. Leerlingen kunnen daardoor wiskundige relaties en verbanden veel gemakkelijker waarnemen.
Als rekenmachine en als software voor de computer beschikbaar.
TI-Nspire™ TECHNOLOGIE
Voor een beter begrip van de wiskunde.
www.education.ti.com/nederland
ALGEBRA
LIJSTEN/ SPREADSHEETS
GRAFIEKEN/ MEETKUNDE
TEKSTVERWERKEN
VIERDYNAMISCH GEKOPPELDE OMGEVINGEN, TE BEWAREN IN ÉÉN DOCUMENT
Nu tijdelijk TI-Nspire™ bundel (handheld +software) voor slechts € 99,– ! *
tel 020 - 58 29 490
* exclusief € 9 verzendkosten
Texas Instruments
Uw expertise. Onze technologie. Succes voor de leerling.

Gesprek met Commissie Dijsselbloem

[Marian Kollenveld]

Inleiding
De parlementaire onderzoekscommissie Dijsselbloem (officieel de "Tijdelijke Commissie Parlementair Onderzoek Onderwijsvernieuwingen") probeert erachter te komen waarom de grote vernieuwingsoperaties van de laatste jaren, zoals basisvorming en 2e fase, ondanks groot enthousiasme van parlement en betrokken instanties toch niet het gewenste effect hebben gehad. De mening van de leraren wordt daarbij ook nadrukkelijk gevraagd. Hieronder de bijdrage van de NVvW.

Algemeen
Hoofdoorzaak van het mislukken van grote innovaties: verschil in tijdpad, te weinig geduld bij de uitvoering, beleid op beleid stapelen, te laat en te weinig aandacht voor de mensen die het moeten gaan doen. De politiek neemt lang de tijd, in de gedachten en besluitvormingsfase worden docenten niet of nauwelijks betrokken. Pas aan het eind is er een raadpleging. De invoeringsfase moet snel, en tijdens de invoering worden alweer wijzigingen doorgevoerd

Casus 2e fase algemeen
Ontwikkeling van draagvlak en implementatie
De stuurgroep 2e fase besteedde veel aandacht aan het veld. De conferenties 'Studiehuis in de steigers' trokken veel enthousiaste bezoekers, er was elan, er waren netwerken en er werd voluit geëxperimenteerd met activerende lesvormen.
Dit alles veranderde toen de stuurgroep werd opgeheven en het ministerie de regie kreeg. Ondanks herhaald aandringen van de vakinhoudelijke verenigingen kregen docenten geen tijd voor inhoudelijke voorbereiding. De gevraagde 2 uur per docent in de bovenbouw in het jaar voorafgaand aan de invoering kromp in via 1 uur per fte in de bovenbouw tot een lumpsum bedrag waarvan scholen vaak tweedefasegroepjes maakten die een en ander organisatorisch voorbereidden. *Er was dus geen geld en tijd voor een inhoudelijke voorbereiding van docenten.* Inhoudelijke en didactische voorbereiding kwam zo niet van de grond. Er is dus ook nooit op grote schaal nascholing opgezet. Toen niet, en later ook niet, omdat die nascholing inmiddels vraaggestuurd was, de schoolleiding het geld had en liever een algemene studiedag organiseerde dan de leraar naar een vakinhoudelijke scholing liet gaan.

Dit is een grote blunder van OCW; de politiek had moeten eisen dat er budget kwam voor een goede inhoudelijke voorbereiding, zowel programmatisch als didactisch. En dus ook voor een goed informatie- en scholingsaanbod.

Berekeningen van OCW gaven ook aan dat het budgettair neutraal kon worden ingevoerd, veel meer vakken, maar voor hetzelfde geld. Voor de leraar betekende dit meer leerlingen, minder lessen, geen voorbereiding, maar wel een vol programma.
Dit kon dus niet goed gaan, en het ging ook niet goed.

Casus basisvorming wiskunde
De jaren voorafgaand aan de invoering van de basisvorming liep het project wiskunde 12-16 (W12-16), een inhoudelijk gemotiveerde verbetering voor de onderbouw. Dit programma oorzag in diverse trajecten voor de diverse onderwijsniveaus (vmbo/vwo). De invoering viel samen met de invoering van de basisvorming, en de politiek verbood (ondanks smeekbeden vanuit de wiskunde) de diverse trajecten; alles moest op één niveau worden aangeboden. Het gevolg is dat er nu nog steeds op havo/vwo in de eerste jaren voor wiskunde nauwelijks leerwinst is. Veel van de huidige problemen van de aansluiting op hbo/wo vinden hier hun oorsprong, en worden versterkt door reducties in contacttijd in de bovenbouw. Er is zoveel minder tijd voor het programma, waardoor het eindniveau logischerwijs lager ligt dan kan. Dit is de politiek volledig te verwijten (en de gehoorzaamheid van de onderdanen)

Casus wiskunde vmbo
Het W12-16-programma was het uitgangspunt, maar het moest in de nieuwe organisatie worden gepropt door middel van substantieel schrappen.
De leraren wiskunde waren het niet eens met de beperkte niveaus, en wilden graag de toenmalige niveaus D, C, B en A handhaven, maar voor het D-niveau was geen plaats meer. De programmacommissie had uitdrukkelijk de opdracht de doorstroom naar havo te blokkeren.
Leerlingen hadden met die oude niveaus de mogelijkheid om in de vakken waarin ze sterker waren, op een hoger niveau examen te doen, waardoor de kansen in de doorstroming groter werden. Het enige voorgeschreven niveau werd C-min, terwijl veel mavo-leerlingen examen deden op D-niveau. Een door de politiek afgedwongen niveaudaling dus.
Daar waren wij het niet mee eens, de commissie is ongehoorzaam geweest en het werd een C-niveau en geen C-min, maar het scheelt nauwelijks.
Voor het BBL-niveau werd opgedragen dat 80% van de leerlingen in 80% van de tijd het programma voldoende moest kunnen afsluiten. Ook daartegen hebben we bezwaar aangetekend, want dat staat gelijk met géén niveau. Toch moest dat zo en vandaar de tweedeling, of je kunt C of je had niets. Er is hierover door de commissie met de opdrachtgevers zwaar strijd gevoerd en het mes is letterlijk op tafel gelegd om de commissie die de programma's maakte te dwingen.
De sectorspecifieke invulling: in lijn met de profielen voor havo/vwo is dat voor wiskunde gevraagd, maar ook hier is er niet naar het veld geluisterd.

Wat had de politiek moeten doen?
Minder vanuit de ideologie handelen, meer luisteren naar de mensen die in het onderwijs werken.

Casus 2e fase: wiskunde
De programma's, de herzieningen en de boeken
De Vakontwikkelgroep Wiskunde kreeg erg weinig tijd omdat de politieke besluitvorming uitliep. Halverwege het werk werd door de politiek het gemeenschappelijk deel geschrapt en de omvang van de vakken veranderd; dit

kon maar gedeeltelijk worden verwerkt.
De coördinatiecommissie die de samenhang van de programma's per profiel zou bewaken, heeft haar werk niet kunnen doen. Dat werk lag logischerwijs tegen het eind van de ontwikkeling van de diverse programma's, maar daar was geen tijd meer voor aanpassing.

De uitgevers volgden onder grote tijdsdruk de ontwikkeling op de voet, waardoor de diverse subdomeinen in de boeken kwamen min of meer in de toevallige volgorde waarin de vakontwikkelgroep de subdomeinen had ontwikkeld, en als afzonderlijk domein, niet op basis van een didactische keuze. Er was dus aan het begin van de 2e fase geen overzicht en weinig samenhang in de boeken (en ook nog veel fouten en misinterpretaties).

Er was een examenexperiment, Profi, maar er was na het experiment geen tijd om de ervaring te verwerken in een verbeterd programma (laat staan verbeterde boeken); er kon alleen wat uit. Dat gebeurde op een bepaald moment maandelijks met diverse tijdelijke en permanente uitsluitingen voor het hele programma dan wel alleen het schriftelijk examen. Zowel CEVO als OCW weerden zich stevig. (Heet zoiets niet beleidsdiarree?)
Voor herziene delen van de boeken was geen tijd, want in 2002, zegge en schrijve één jaar na het eerste vwo-examen 2e fase, kwam de minister alweer met een herontwerp 2e fase, met voor wiskunde ingrijpende wijzigingen als reducties met 30% van wiskunde B, herziening van profielen en de plaats van wiskunde daarin, afschaffen wiskunde voor CM-havo. Gebaseerd op?

Door veel protesten, o.a. van leraren, leerlingen en studenten, duurde het tot 2006 voor een en ander uiteindelijk vastlag.
Herziene programma's voor 2007 moesten dus wederom in een vloek en een zucht worden gemaakt.
De syllabi voor de programma's van augustus 2007 zijn sinds oktober 2007 beschikbaar.
Inmiddels is de vernieuwingscommissie cTWO bezig met de programma's voor 2010.
Pikant is dan dat in 2010 het eerste vwo-examen van de 2007-programma's samenvalt met de invoering van alweer nieuwe wiskunde-programma's in de vierde klas.
Het betekent ook dat de veldraadplegingen voor de 2010-programma's in september 2007 plaatsvinden, net een maand nadat de 2007-programma's in de vierde klas zijn ingevoerd.

Welke leraar kan dit nog volgen?
Wat had de politiek moeten doen?
Wachten, zich er niet voortdurend tegenaan bemoeien en de ontwikkelingen de tijd geven, niet maatregel op maatregel en herziening op herziening stapelen.

Standpunt NVvW m.b.t. de examenprogramma's van 2011

REACTIE D.D. 21 NOVEMBER 2007, BESTEMD VOOR cTWO

[Marianne Lambriex, namens het NVvW-bestuur]

Algemeen
Het examenprogramma van 2011 moet de grote vernieuwing bevatten van de examenprogramma's van 1998. De aanpassingen in het examenprogramma van 2007 zouden marginaal moeten zijn; dat is voor wiskunde dus niet zo uitgepakt vanwege allerlei structurele veranderingen zoals de forse reducties in omvang van de wiskunde in het NT-profiel en de invoering van wiskunde C en D. De aanpassing van 2007 is een haastige operatie geworden, waarvoor niet genoeg tijd was uitgetrokken om een volwaardig weloverwogen programma neer te zetten. Dit zouden we kunnen vermijden bij deze laatste vernieuwing, maar ook hier laten we ons leiden door haast. Dat blijkt uit het feit dat docenten massaal afhaken als hun gevraagd wordt mee te denken; het aantal docenten op de veldraadpleging is op één hand te tellen, en ook de digitale raadplegingen van cTWO en de NVvW worden niet bezocht. Niet verwonderlijk als je bedenkt dat een gewone wiskundedocent nu in zijn/haar lessen met de examenprogramma's van 1998 (8 stuks in 2 cohorten waarin op schoolniveau ook verschillende exameneisen kunnen zijn afgesproken), en met de examenprogramma's van 2007 (7 in één cohort, waarvan de twee D's echt vernieuwd zijn) moet werken en dan ook al moet gaan denken aan de 7 nieuwe die pas in 2011 op stapel staan. Overladenheid van de programma's is een issue, maar de overladenheid van de wiskundedocent is een feit.
Met de Tweede fase is ook de grafische rekenmachine (GR) in het programma opgenomen. Over deze GR is heel veel gediscussieerd en nog steeds. Binnen de NVvW is het hele scala aan meningen over het gebruik hiervan verte machine maar als een modern instrument, als een krachtige leeromgeving waarin onderzoek door leerlingen mogelijk gemaakt wordt, de GR niet alleen een toevoeging is maar ook een verrijking van het programma. Dat de algebra wat verwaarloosd is, is eenieder wel duidelijk, maar de oorzaak daarvoor ligt eerder in de overladenheid en de vermindering van het aantal contacturen dan aan de GR. En vergeet het gat dat de basisvorming veroorzaakt heeft, niet. Het bestuur pleit krachtig vóór het gebruik van de GR die ook ingezet wordt bij examens, waarbij er opgaven zijn waarbij het gebruik nodig is en opgaven waarbij de GR niet gebruikt kán of mag worden; het is in de vraagstelling eenvoudig te doen door gewoon te vragen naar een algebraïsche oplossing zoals in het nomen clatuurrapport zo mooi staat.

Er is veel te doen over de inzet van ICT. De leerling van nu is erbij gebaat om ook al op het vo kennis te maken met de meest moderne technieken, zodat hij inzicht heeft in de ontwikkelingen binnen onze maatschappij. Bovendien zijn de leerlingen daar ook nieuwsgierig naar. ICT moet ingezet kunnen worden als tool (use to learn en niet learn to use), als werkvorm en leeromgeving. De schoolwiskunde moet niet alleen leren over de ontdekkingen tot 1700 maar ook over die van nu.Verder zijn we ons ervan bewust dat in 2007, doordat er in het B-programma slu's verminderd zijn, de keuze gemaakt is om statistiek te laten vervallen. Uit vele reacties blijkt dat dit nog steeds betreurd wordt. Juist als het gaat om de doorstroomrelevantie is een onderdeel als statistiek ook in het B-programma onmisbaar. Snijden doet lijden.

Maar de leerlingen krijgen zo wel een heel eenzijdig beeld van de wiskunde vergelijkbaar met, pak hem beet, de tijd vóór de Tweede fase, omdat het accent bijna uitsluitend op analyse en analytische vaardigheden komt te liggen, tenzij ze D gekozen hebben. Maar jammer genoeg is dat geen verplicht vak en ook de vervolgopleidingen nemen hierover amper een stelling in.
In de discussie rond deze nieuwe examenprogramma's komt steeds de term doorstroomrelevant naar voren, een term die met name de resonansgroep hoog in haar vaandel heeft staan; en dat hoort ook zo, want dat is de formele toetssteen van deze commissie, de programma's toetsen op doorstroomrelevantie. Uit o.a. het NKBW-onderzoek en ook uit onze eigen waarneming blijkt dat doorstroomrelevantie in het hbo overal anders is en vaak niet geboren uit echte noodzaak maar uit historische gemakzucht. Voor vo-docenten is het nu onoverzichtelijk wat het hbo aan algebraïsche vaardigheden eist; een inventarisatie met redenen waarom een vaardigheid nodig is, zou hierbij verhelderend zijn. Echter de examenprogramma's moeten niet enkel doorstroomrelevant zijn, maar ook werken aan de algemene intellectuele ontwikkeling waaraan wiskunde ook een bijdrage moet leveren.
De politiek heeft ervoor gekozen om in de profielen E&M en N&G zowel wiskunde A als wiskunde B als profielvak aan te wijzen. Deze nieuwe structuur per 2007 legt een basis voor toekomstige klachten; vervolgopleidingen krijgen weer te maken met verschillende instroom, waarbij docenten nu al constateren dat havo A in NG tekort schiet. Deze tweespalt is ons opgedrongen, er is geen oplossing voor mogelijk, er zijn alleen keuzes te maken. Profielspecifieke invulling voor zowel wiskunde A als B zal afhankelijk moeten worden van het door de leerling gekozen profiel.
Het ligt voor de hand om, zodra leerlingen natuurkunde kiezen, verplicht te stellen wiskunde B te volgen, omdat daarmee in het B-programma rekening wordt gehouden.
We missen bij sommige programma's een inventarisatie van de voorziene slu's, waardoor het moeilijk is een uitspraak te doen over overladenheid of haalbaarheid. Ook hiervoor zullen de eerste (proef)examens maatgevend zijn.
Daarnaast mist de NVvW de samenhang met de andere vakken in de profielen van de Tweede fase, maar dat is een tweezijdig proces. Zowaar een eis die tijdens de vo-opleiding nog belangrijker is dan doorstroomrelevantie.
De beschrijving van de verschillende examenprogramma's is niet consistent, met name de A-domeinen zaaien verwarring. Denk aan de wiskundedocent die al deze programma's moet verwerken!

De hieronder staande opmerkingen gaan niet in op eindtermniveau maar zijn globaal. De ervaring leert dat werkendeweg een eindterm wel of niet nodig/werkbaar is en de zwaarte ervan wordt bepaald. Bovendien hebben diverse groeperingen zich al op eindtermniveau uitgesproken. De verwachting is dat de syllabus, die nog komt, hierin duidelijkheid zal brengen.

Havo A
De nieuwe opzet voor het domein E (Onzekerheid; voorheen Kansrekening en Statistiek) lijkt haalbaar, maar kan alleen slagen als de docenten tijdig voorbereid zijn. We gaan ervan uit dat hiervoor nascholing nodig is.
Dit programma schiet tekort als profielvak in NG: de aansluiting met technische hbo's ontbreekt. Het domein Analyse is zo uit het 2007-programma overgenomen en dat was toentertijd een noodgreep; een heroverweging is op zijn plaats.

Havo B
Een eerste reactie is dat dit programma veel algebra bevat, veelal algoritmische uitvoering van procedures is, eenzijdig en saai is; zelfs Meetkunde wordt analytisch in plaats van synthetisch. Dit laatste is omstreden: voor leerlingen is het een openbaring dat wiskundige problemen op een andere dan algoritmische wijze op te lossen zijn. Ook wordt er gevreesd voor overladenheid en een te hoog niveau. Als er ruimte gezocht moet worden dan zeker niet door het schrappen van goniometrie; deze moet in eenvoudige vorm aanwezig blijven. De reactie van het docentenforum om meetkunde in wiskunde B onderscheidend te maken van wiskunde D, bijvoorbeeld door vlakke meetkunde in wiskunde B en ruimtemeetkunde in wiskunde D, wordt onderschreven.

Havo D
Het nieuwe havo-D-programma is nauwelijks veranderd, terwijl het B-programma dat wél is. Daardoor is er nu een overlap in C: toegepaste analyse 2. Fraaier zou zijn als het D-programma een meer eigen gezicht zou krijgen (zie de reactie van het FIsme). Het domein Statistiek kan in wiskunde D meer theoretisch zijn dan in wiskunde A. Zo voorkom je dat, vanuit de schoolorganisatie, de havo-A-leerlingen en de havo-D-leerlingen samengevoegd worden. (Dat is net zoiets als het vak Duits en Frans samenvoegen, want ze hebben het Nederlands gemeenschappelijk.) De verschillende organisatiemodellen, schoolmodel en samenwerkingsmodel, worden hier niet genoemd, maar wel in de toelichting van het 2007-programma. Van het laatste model constateren de docenten in het veld dat het hbo het hierbij bijna volledig laat afweten. Wil dit slagen, dan zal het hbo zich daarvoor moeten inzetten.

Vwo A
Dit programma bevat heel veel statistiek; er is een kans op overladenheid. Het behandelen van de 'wet van Bayes' gaat te ver. Er is veel bijval voor het voorstel van het FIsme om in domein D (Verandering) ruimte te maken voor Grafen en Matrices. Deze ruimte kan er komen omdat bij de differentieertechnieken de product- en kettingregel overbodig zijn. Niet voor de doorstroom naar technisch hbo, maar daarvoor is wiskunde A niet bedoeld.

Vwo B
De resonansgroep constateert dat dit programma in alle opzichten doorstroomrelevant is, en daarin schuilt nu net de verarming die docenten constateren. Het bestaat net als het havo-B-programma uit algoritmische uitvoering van procedures. Het uitruilen van de synthetische meetkunde (daaraan wordt nauwelijks aandacht besteed in de onderbouw) tegen de analytische meetkunde is geen simplificering en nog meer verarming. Er is expliciet sprake van gewenste aantallen contacturen en aangezien de meeste scholen dat aantal niet zullen halen is er duidelijk sprake van overladenheid van het programma. Een verdere verarming is de visie op gebruik van GR en ICT, die kunnen we niet onderschrijven. Zo is bijvoorbeeld de Riemann-som alleen zinvol als de GR gebruikt kan worden.

Vwo D
Hierin is geen spoor van ICT te vinden, terwijl met name het domein Dynamische systemen daar juist om vraagt; hier komt het modelleren aan de orde en kunnen complexere systemen doorgerekend worden zonder ze analytisch op te lossen. Ook in dit programma is sprake van een verarming, daar waar linken met meetkunde mogelijk zijn, worden deze niet gemaakt. Met betrekking tot Statistiek gelden dezelfde opmerkingen als bij de havo B/D-programma's. Door het enthousiasme van docenten en universiteiten kan het samenwerkingsmodel in het vwo wel ingevuld worden.

Vwo C
De NVvW is verheugd dat er handen en voeten gegeven zijn aan het wiskunde-C-programma. Hiernaar wordt al jaren uitgekeken. Dit programma is een mooi voorbeeld van profielspecifieke invulling. Vooral domein B valt hierin op in positieve zin. Maar ook hier zorgen organisatorische aspecten voor problemen: gezien de geringe aantallen wiskunde-C-leerlingen zal het management deze bij wiskunde-A-leerlingen willen plaatsen. Met deze zeer verschillende programma's is dat niet mogelijk en dat moet in een toelichting opgenomen worden. Met betrekking tot het domein C (Onzekerheid) gelden dezelfde overwegingen als bij wiskunde A.

Puzzel 833

Gouden ballen

[Frits Göbel]

Het boekje 'Puzzles From Around The World' van Dick Hess is in deze rubriek al eens eerder genoemd. Er staan 104 puzzels in, waarvan 93 met oplossing. Dit is nummer 75:
'Two brothers found 12 solid gold balls having diameters of 1, 2, 3, …, 12 cm. How did they divide the balls into two sets which have the same total weight?'

Het leek me wel een aardige vraag om mee te beginnen. Hier komt een Nederlandse formulering, zonder gouden ballen.

Opgave 1
Splits de verzameling $\{1^3, 2^3, \ldots, 12^3\}$ in twee groepen die dezelfde som hebben.

In plaats van derde machten kun je natuurlijk ook kwadraten nemen. Omdat de opgave dan te eenvoudig wordt, maken we er het volgende van.

Opgave 2
Voor welke n kun je de verzameling $\{1^2, 2^2, \ldots, n^2\}$ in twee groepen verdelen die dezelfde som hebben?

Dit lijkt misschien erg tijdrovend vanwege het oneindige karakter van de opgave, maar dankzij de regelmatige manier waarop de kwadraten toenemen valt dit erg mee. Voor hogere machten heb ik geen splitsing in gelijke stukken kunnen vinden, maar ik denk dat ze wél bestaan. Het aantal mogelijke splitsingen neemt namelijk sterker toe dan het aantal sommen. Bovendien is te verwachten dat splitsingen met 'ongeveer gelijke sommen' vaker voorkomen dan de overige.

Je kunt ook splitsingen in drieën bekijken. Ik heb er vanaf gezien om drie zussen op stap te sturen: u krijgt weer abstracte opgaven.

Opgave 3
Splits de verzameling $\{1^2, 2^2, \ldots, 13^2\}$ in drie groepen die dezelfde som hebben.

Opgave 4
Bepaal een oneindige rij waarden van n waarvoor de verzameling $\{1^2, 2^2, \ldots, n^2\}$ in drie groepen met dezelfde som kan worden gesplitst.

Oplossingen kunt u mailen naar *a.gobel@wxs.nl* of per gewone post sturen naar F. Göbel, Schubertlaan 28, 7522 JS Enschede.
Er is voor de oplossing van deze kerstpuzzel een boekenbon van 30 euro te verdienen. Daarnaast wordt de tussentijdse ladderstand opgemaakt; voor de 'ladderhoogste' ligt eveneens een bon van 30 euro te wachten. De deadline is 15 januari 2008.
Veel plezier!

Oplossing 831

Science Explorer

Er waren 10 oplossers, waaronder één nieuwe: Floor van Lamoen. Hartelijk welkom!

Het antwoord op *opgave 1* is: 12. Dit aantal is te bereiken met een achtvlak. Je hebt dan meteen drie vierkanten, maar het kan echt niet zuiniger.
Twee inzenders noemden de vierzijdige piramide als oplossing, maar die is niet star.

Opgave 2 gaf meer moeilijkheden. Als je op het achtvlak met drie staafjes een viervlak bouwt, verschijnen er drie ruiten. Er zijn dan 15 staafjes nodig en minder kan niet. Naast 15 werden de volgende aantallen ingestuurd: 8, 14 en 18.
Ton Kool stuurde prachtige foto's van zijn oplossingen (***zie figuur 1***) en Gerhard Riphagen verblijdde mij met een kartonnen model van de tweede oplossing. Hartelijk dank voor deze bijdragen!
Herm Jan Brascamp stuurde ook een oplossing van opgave 2 waarin de ruit zonder diagonaal optreedt. In eerste instantie kostte hem dat 39 staafjes, maar toen hij en zijn helpers met echte staafjes aan de slag gingen, kon dit aantal worden gereduceerd tot 24.
Deze oplossing werd ook door een andere deelnemer gevonden, met dien verstande dat deze een telfoutje maakte.
Opgave 3 werd door alle inzenders goed opgelost. Het antwoord is $\binom{3k}{k}$. Dit is als volgt in te zien. Ga uit van $3k$ open plaatsen. Kies hieruit $2k$ posities voor de n- en de z-staafjes. Zet dan de g-staafjes er tussen. Dit gaat alleen goed als de n-staafjes en de z-staafjes elkaar afwisselen. Die kunnen dus, na keuze van de $2k$ posities, op slechts één manier worden geplaatst. Ook van de g-staafjes ligt de richting dan vast.
Voor $k = 3$ zijn er dus 84 rijtjes te vormen.

Dit aantal daalt tot 10 als we er, zoals in *opgave 4*, ringen van maken. Bijna iedereen loste dit op door uitschrijven, waarbij ook 9, 12 en 28 werden gevonden.
Wobien Doyer vond de oplossing zonder uitschrijven, op de volgende manier.
Van een ring kun je een rij maken door hem open te maken. In het algemeen gaat een ring van m elementen dan over in m rijen van m elementen. Maar als de ring een punt van symmetrie heeft, wordt dit aantal kleiner. In ons geval is er slechts één type symmetrische ring: drie groepjes *nzg*. Die kun je op drie manieren openen. Laat nu x het gevraagde aantal ringen zijn. Dan geldt dus $1{\times}3 + (x - 1) \times 9 = 84$, met als oplossing $x = 10$. Wobien merkte ook op dat k kan worden vervangen door een willekeurig priemgetal. Er komt dan:

$$1\times3+(x-1)\times3k=\binom{3k}{k}$$

figuur 1

Ladderstand
De top van de ladder ziet er nu als volgt uit:
H.J. Brascamp 472
J. Meerhof 395
L. de Rooij 333
G. Riphagen 289
L.H. van den Raadt 217
H. Klein 183
N. Wensink 178
W. Doyer 176
T. Kool 99

SERVICEPAGINA

Publicaties van de Nederlande Vereniging van Wiskundeleraren

Zebraboekjes

1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christiaan Huygens
18. Zeepvliezen
19. Nullen en Enen
20. Babylonische Wiskunde
21. Geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde
22. Spelen en Delen
23. Experimenteren met kansen
24. Gravitatie
25. Blik op Oneindig
26. Een Koele Blik op Waarheid

Zie verder ook *www.nvvw.nl/zebrareeks.html* en/of *www.epsilon-uitgaven.nl*

Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo

Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

Wisforta – wiskunde, formules en tabellen

Formule- en tabellenboekje met formulekaarten havo en vwo, de tabellen van de binomiale en de normale verdeling, en toevalsgetallen.

Honderd jaar wiskundeonderwijs, lustrumboek van de NVvW

Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW: *www.nvvw.nl/lustrumboek2.html*
Voor overige NVvW-publicaties zie de website: *www.nvvw.nl/Publicaties2.html*

Voor overige internet-adressen zie *www.wiskundepersdienst.nl/agenda.php*

Voor Wiskundeonderwijs Webwijzer zie *www.wiskundeonderwijs.nl*

Kalender

In de kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo vroeg mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur, het liefst via e-mail (*redactie-euclides@nvvw.nl*). Hieronder vindt u de verschijningsdata van Euclides in de lopende jaargang. Achter de verschijningsdatum is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de *eind*versies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook *www.nvvw.nl/euclricht.html.*

nr.	verschijnt	deadline
4	7 februari	11 december
5	6 maart	22 januari
6	17 april	4 maart
7	29 mei	8 april
8	30 juni	15 mei

zaterdag 12 januari, Utrecht
Wintersymposium KWG
Organisatie KWG
Zie pag. 66 in nummer 2.

wo. 23 t/m vr. 25 januari, Noordwijkerhout
26e Panama conferentie
Organisatie FIsme

vrijdag 25 januari, op de aangemelde scholen
1e ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade 2008
Organisatie Stichting NWO
Zie pag. 76 in nummer 2.

woensdag 30 januari, Utrecht
- Studiedag: Dyscalculie
- Studiedag: Wiskunde leren in een ELO

Organisatie APS

donderdag 31 januari, Utrecht
Studiedag: Inspiraties voor de wiskundeles
Organisatie APS

vr. 1 en za. 2 februari, Noordwijkerhout
14e Nationale Wiskunde Dagen
Organisatie FIsme

dinsdag 19 februari, Amsterdam
Mastercourse: Golven als dynamische systemen
Organisatie UvA

donderdag 6 maart, Amsterdam
Mastercourse: Computerarchitectuur
Organisatie UvA

do. 13 en vr. 14 maart, Garderen
Finale Wiskunde A-lympiade
Organisatie FIsme

do. 27 en vr. 28 maart, Noordwijkerhout
Nationale Rekendagen
Organisatie FIsme

woensdag 9 april, Amsterdam
Mastercourse: Laat de Spelen beginnen! Olympische wiskunde
Organisatie UvA

vrijdag 11 april, op de scholen
Wiskunde Kangoeroe
Organisatie Stichting Wiskunde Kangoeroe

woensdag 16 april, op de scholen
De Grote Rekendag
Organisatie FIsme